

BAB II

STUDI LITERATUR

2.1 Studi Literatur tentang Beberapa Metode Perhitungan Sumberdaya atau Cadangan

Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk mengembangkan metode perhitungan sumberdaya atau cadangan. Penelitian-penelitian tersebut dilakukan untuk menghilangkan dan mengkompensasi beberapa kelemahan dari metode perhitungan sumberdaya atau cadangan yang telah ada. Berikut beberapa solusi metode perhitungan sumberdaya atau cadangan yang telah dikembangkan.

Sulistianto et al (2000) memberikan kontribusi berupa usaha otomatisasi perhitungan cadangan tertambang menggunakan paket program Microsoft Excel.

Nusdaper (2001) meneruskan penelitian yang dilakukan oleh Sulistianto et al (2000) dengan kontribusinya berupa usaha semi otomatisasi yang didapat Sulistianto et al (2000). Semi otomatisasi dilakukan menggunakan *macro* paket program Microsoft Excel. Namun, penentuan perpotongan antara topografi dan *high wall pit limit* masih menggunakan cara *trial and error*.

Pratyaksa (2003) membuat perangkat lunak perhitungan cadangan tertambang batubara M-BLOCK yang didasarkan pada metode penampang vertikal dan didukung oleh perangkat lunak grafis AutoCAD dan lembar kerja Microsoft Excel. Kedua perangkat pendukung dihubungkan oleh perangkat lunak antarmuka, sehingga semua proses identifikasi geometri endapan batubara serta perhitungan luas yang dikerjakan oleh AutoCAD dapat ditransfer ke dalam Microsoft Excel.

Fujiono (2003) melakukan penelitian tentang cadangan tertambang batubara didasarkan pada metode penampang vertikal. Penampang geometri endapan batubara dibagi-bagi secara horizontal menjadi beberapa elevasi dan secara vertikal menjadi beberapa strip.

Widodo (2004) memberi kontribusi secara awal tentang cara menangani, mengekspresikan, dan merangkum data-data berupa titik-titik menjadi sebuah model konseptual dan model matematik dengan ekspresi yang komprehensif untuk memudahkan perhitungan sumberdaya dan cadangan batubara. Di dalam penelitian ini dijelaskan filosofi pemodelan menggunakan Metode Elemen Hingga (MEH) yang dapat diterapkan dalam perhitungan sumberdaya atau cadangan batubara.

Augusman (2006) dalam penelitiannya menghasilkan paket program sebagai jembatan penghubung untuk mengintegrasikan aplikasi Microsoft Excel dan AutoCAD dengan menggunakan bahasa pemrograman sehingga optimasi cadangan dapat berjalan dengan cepat.

Anaperta (2006) memodelkan permukaan topografi dan batubara menggunakan elemen-elemen segitiga. Dari masing-masing elemen ini dihitung ketebalan maupun luas batubara dan *overburden* untuk mendapatkan volume.

Widodo et al (2006) dalam penelitiannya telah memberikan estimasi sumberdaya batubara menggunakan metode elemen hingga, dimana metode elemen hingga dapat digunakan sebagai estimator. Aplikasi metode elemen hingga untuk estimasi sumberdaya didasarkan pada asumsi bahwa *state variable* pada endapan harus berada pada kondisi *steady state*.

Widodo (2006) mengenalkan konsep pendekatan alternatif untuk estimasi sumberdaya batubara dengan kendala utama berupa air permukaan dan air tanah.

Widodo mencoba menerapkan metode deterministik yang direalisasikan oleh metode elemen hingga (MEH) sebagai *common platform* untuk evaluasi sumberdaya batubara dan evaluasi kondisi air permukaan dan air tanah, sehingga evaluasi terhadap keduanya dapat dilakukan secara terintegrasi.

Dwiantoro dan Wibawa (2007) melakukan penelitian tentang perhitungan sumberdaya batubara menggunakan Metode Elemen Hingga. Pengolahan data dilakukan menggunakan Metode Elemen Hingga untuk estimasi sumberdaya batubara berdasarkan model konseptual dan model matematika.

2.2 Analisis Statistik Deskriptif

Analisis Statistik dilakukan untuk mengetahui parameter-parameter atau karakteristik populasi endapan dari sampel yang diambil serta melihat hubungan antara data dalam populasi yang sama atau hubungan antara data-data dalam satu populasi dengan data dalam populasi lainnya. Dalam analisis statistik terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, antara lain :

1. Deskripsi univarian, merupakan deskripsi yang digunakan untuk melihat hubungan antar data dalam satu populasi, tanpa mempertimbangkan faktor posisi dari data-data tersebut. Deskripsi univarian meliputi *mean*, *median*, *modus*, ukuran dispersi, ukuran kemiringan kurva (*skewness*), ukuran keruncingan kurva (*kurtosis*), dan histogram.
2. Deskripsi bivarian, merupakan deskripsi yang dapat digunakan untuk melihat hubungan antara dua populasi data yang berbeda, pada posisi yang sama.
3. Deskripsi ruang, merupakan deskripsi yang dapat digunakan untuk melihat kumpulan data dengan mempertimbangkan faktor ruang (posisi) dari data tersebut (geostatistik).

2.3 Pemodelan dan Perhitungan Cadangan Batubara

Secara umum, pemodelan dan perhitungan cadangan batubara memerlukan data-data dasar sebagai berikut (Syafrizal, 2006) :

- Peta topografi
- Data penyebaran singkapan batubara (telah disesuaikan dengan format/datum peta)
- Data dan sebaran titik bor
- Peta geologi lokal (meliputi litologi, stratigrafi, dan struktur geologi)
- Peta situasi dan data-data yang memuat batasan-batasan alamiah seperti aliran sungai, jalan, perkampungan, dan lain-lain.

Data penyebaran singkapan batubara berguna untuk mengetahui *cropline* batubara, yang merupakan posisi dimana penambangan dimulai. Dari pemboran diperoleh hasil berupa data elevasi atap/*roof* dan lantai/*floor* batubara yang akan digunakan dalam pemodelan lapisan batubara serta perhitungan cadangan.

Peta situasi dan data-data yang memuat batasan-batasan alamiah (aliran sungai, jalan, perkampungan, dan sebagainya) berguna untuk menentukan batas/*boundary* perhitungan cadangan. Endapan batubara yang tidak dapat ditambang karena batasan-batasan alamiah tersebut tidak diperhitungkan dalam perhitungan cadangan.

2.3.1 Metode Perhitungan Cadangan Konvensional

Pemilihan metode perhitungan cadangan didasari oleh faktor geologi endapan, metode eksplorasi, data yang dimiliki, tujuan perhitungan, dan tingkat kepercayaan yang diinginkan.

Berdasarkan metode (teknik, asumsi, pendekatan), maka penaksiran dan perhitungan sumberdaya atau cadangan terdiri dari metode konvensional yang terbagi menjadi dua, yaitu metode penampang vertikal (dengan menggunakan rumus *mean area*, kerucut terpancung, *obelisk*) dan penampang horizontal (metode *isoline*, metode poligon, metode *triangle*, dan metode *Circular* USGS 1983). Selain itu, dapat pula dilakukan dengan metode geostatistik dan metode blok.

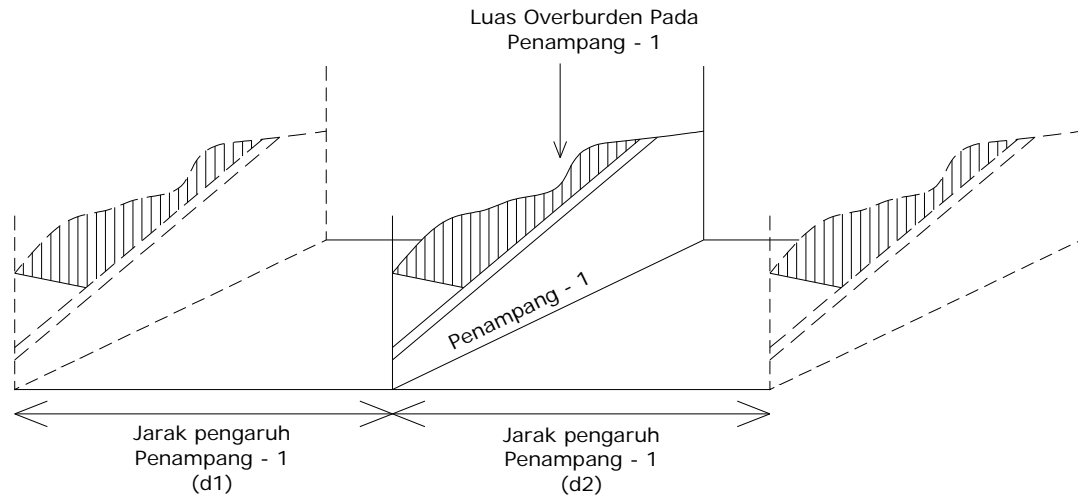
A. Metode Penampang Vertikal

Metode penampang vertikal menggambarkan kondisi endapan, bijih, tanah penutup (*overburden*) pada penampang-penampang vertikal. Perhitungan luas masing-masing elemen tersebut dilakukan pada masing-masing penampang. Perhitungan tonase dan volume dilakukan dengan rumus-rumus yang sesuai.

Metode penampang vertikal dilakukan dengan cara sebagai berikut :

- a. Membuat irisan-irisan penampang melintang yang memotong endapan batubara yang akan dihitung,
- b. Menghitung luas batubara dan *overburden* tiap penampang,
- c. Setelah luasan dihitung, maka volume dan tonase dihitung dengan rumusan perhitungan. Perhitungan volume tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan satu penampang, dua penampang, tiga penampang, atau rangkaian banyak penampang.

Perhitungan volume dengan menggunakan satu penampang digunakan jika diasumsikan bahwa satu penampang mempunyai daerah pengaruh hanya terhadap penampang yang dihitung saja. Volume yang dihitung merupakan volume pada areal pengaruh penampang tersebut.

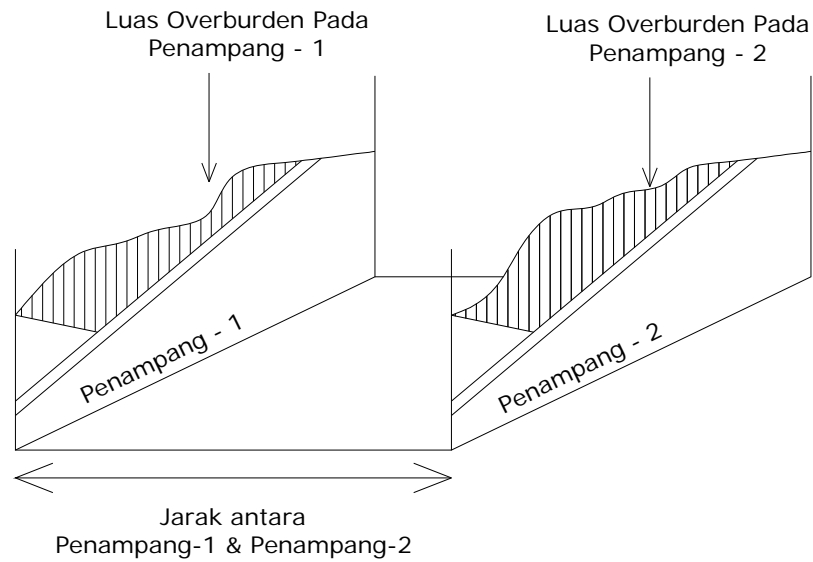


Gambar 2.1. Perhitungan Volume Menggunakan Satu Penampang

Rumus perhitungan volume dengan menggunakan satu penampang adalah :

$$\text{Volume} = (A \times d1) + (A \times d2)$$

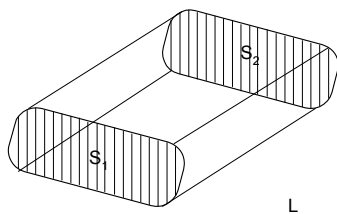
Perhitungan volume dengan menggunakan dua penampang jika diasumsikan bahwa volume dihitung pada areal di antara 2 penampang tersebut. Yang perlu diperhatikan adalah variasi (perbedaan) dimensi antar kedua penampang tersebut. Jika tidak terlalu berbeda, maka dapat digunakan rumus mean area dan kerucut terpancung, tetapi jika perbedaannya cukup besar maka digunakan rumus *obelisk*.



Gambar 2.2. Perhitungan Volume Menggunakan Dua Penampang

Adapun rumus yang digunakan sebagai berikut :

Rumus *Mean Area*



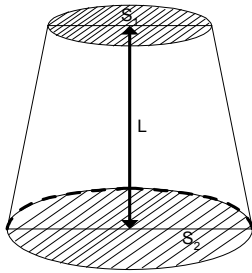
$$V = L \frac{(S_1 + S_2)}{2}$$

S_1, S_2 = luas penampang endapan

L = jarak antar penampang

V = volume cadangan

Rumus Kerucut Terpancung



$$V = \frac{L}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

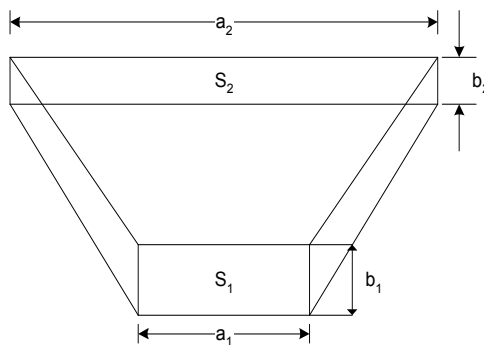
S_1 = luas penampang atas

S_2 = luas penampang alas

L = jarak antar S_1 dan S_2

V = volume cadangan

Rumus Obelisk



$$V = \frac{L}{6} (S_1 + 4M + S_2)$$
$$M = \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{2}$$

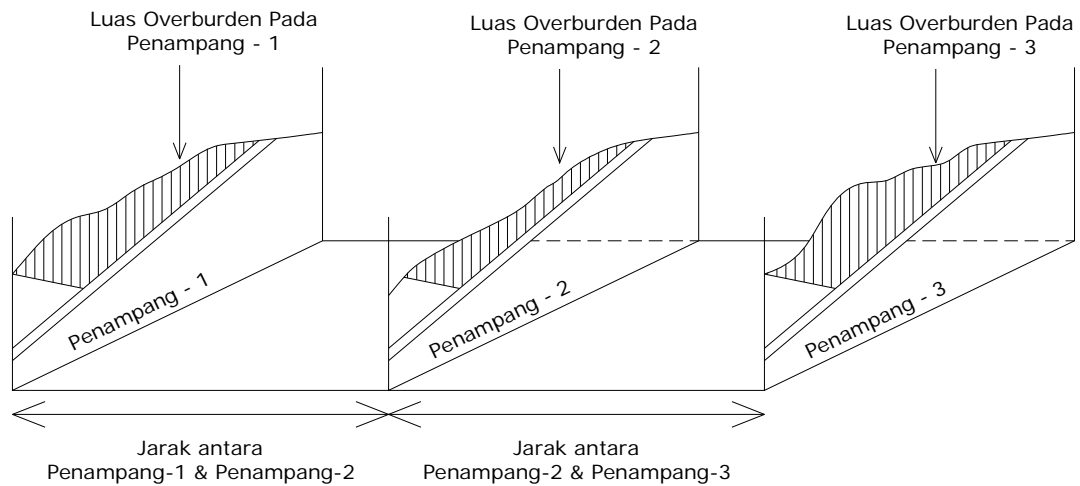
S_1 = luas penampang atas

S_2 = luas penampang bawah

L = jarak antara S_1 & S_2

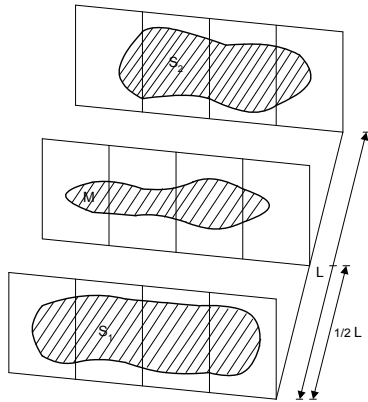
V = volume

Perhitungan volume dengan menggunakan tiga penampang digunakan jika diketahui adanya variasi (kontras) pada areal di antara 2 penampang, maka perlu ditambahkan penampang antara untuk mereduksi kesalahan. Perhitungannya menggunakan rumus prismoida.



Gambar 2.3. Perhitungan Volume Menggunakan Tiga Penampang

Rumus prismoida sebagai berikut :



$$V = L \frac{(S_1 + 4M + S_2)}{6}$$

S_1, S_2 = luas penampang ujung

M = luas penampang tengah

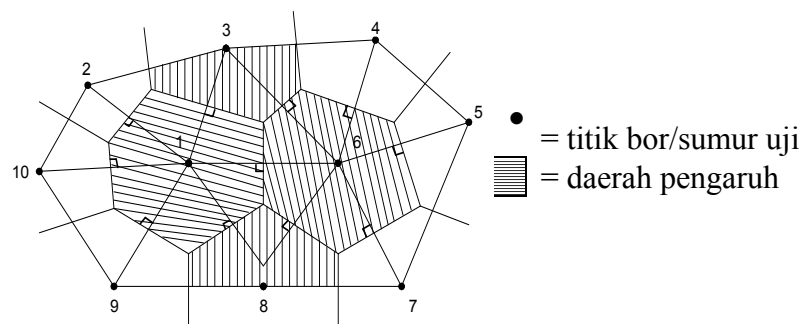
L = jarak antara S_1 dan S_2

V = volume cadangan

a. Metode Penampang Horizontal

Metode penampang horizontal yang biasa digunakan adalah metode poligon, *isoline*, *triangulasi*, dan metode *circular* USGS 1983.

Metode poligon sebenarnya merupakan contoh penerapan dari aturan *nearest point*. Metode poligon adalah suatu metode perhitungan dengan konsep dasar yang menyatakan bahwa seluruh karakteristik endapan suatu daerah diwakili oleh satu titik tertentu. Jarak titik bor di dalam poligon dengan batas poligon sama dengan jarak batas poligon ke titik bor terdekat. Di dalam poligon nilai kadar diasumsikan konstan sama dengan kadar pada titik bor di dalam poligon (Hustrulid & Kuchta, 1995).



Gambar 2.4. Metode Poligon

Perhitungan volume dengan rumus berikut :

$$V = A \cdot t$$

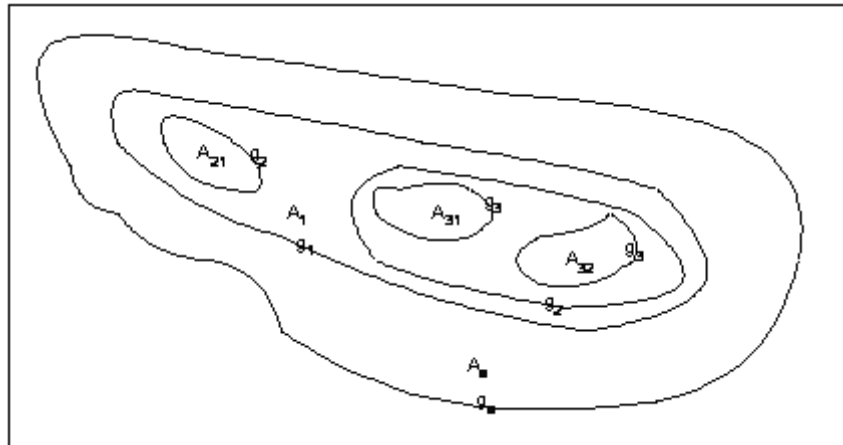
dimana V = volume

A = luas poligon

t = tebal lapisan batubara di titik conto

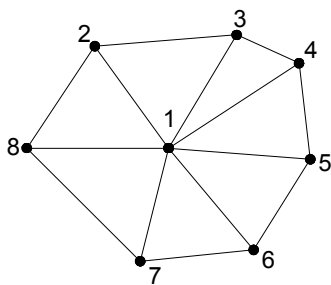
Metode isoline adalah suatu metode yang menggunakan prinsip dasar *isoline*. *Isoline* adalah kurva yang menghubungkan titik-titik yang memiliki nilai kuantitatif sama. Metode ini digunakan dengan asumsi nilai yang berada di antara 2 buah titik kontinu dan mengalami perubahan secara gradual. Volume dapat

dihitung dengan cara menghitung luas daerah yang terdapat di dalam batas kontur, kemudian menggunakan prosedur-prosedur yang umum dikenal.

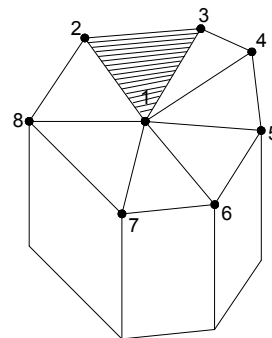


Gambar 2.5. Metode Isoline

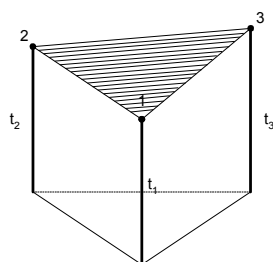
Metode triangulasi dilakukan dengan konsep dasar menjadikan titik yang diketahui menjadi titik sudut suatu prisma segitiga. Prisma segitiga diperoleh dengan cara menghubungkan titik-titik yang diketahui tanpa berpotongan.



Layout dari segitiga-segitiga



Prisma-prisma trianguler



$$\text{Volume} = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3) S$$

S = luas segitiga $\overline{123}$

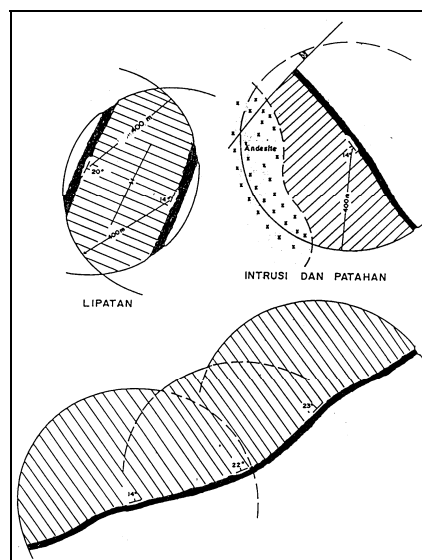
t_1, t_2, t_3 = ketebalan endapan pada masing-masing titik

Gambar 2.6. Metode Triangulasi (*triangular grouping*)

Metode Circular USGS 1983

Prosedur atau teknik perhitungan dalam sistem *U.S. Geological Survey* adalah dengan membuat lingkaran-lingkaran pada setiap titik informasi endapan batubara, yaitu singkapan batubara dan lokasi titik pemboran. Daerah dalam radius lingkaran 0-400 m adalah untuk perhitungan cadangan terukur dan daerah radius 400-1200 m adalah untuk perhitungan cadangan terunjuk (USGS, 1983).

Selain itu aspek-aspek geologi daerah penelitian seperti perlipatan, sesar, intrusi dan singkapan batubara di permukaan, turut mengontrol perhitungan cadangan batubara.



Gambar 2.7. Metode Circular USGS 1983

Selanjutnya untuk perhitungan tonase (W) batubara digunakan rumus sebagai berikut :

$$W = L \times t \times BJ,$$

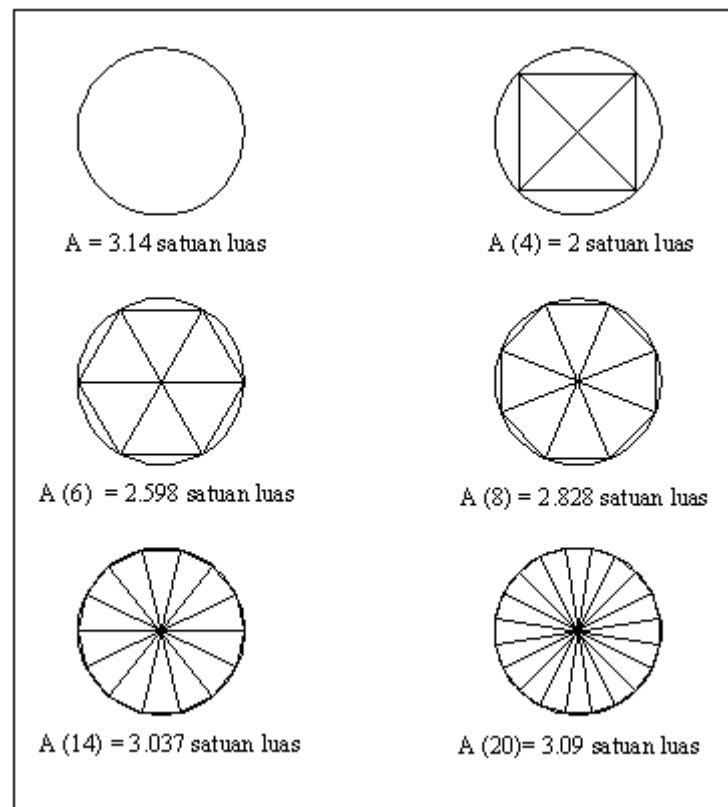
dimana :

- L = Luas daerah terhitung (m^2)
- t = Tebal rata-rata batubara sejenis (m)
- BJ = Berat jenis batubara (ton/m^3)

2.3.2 Metode Elemen Hingga

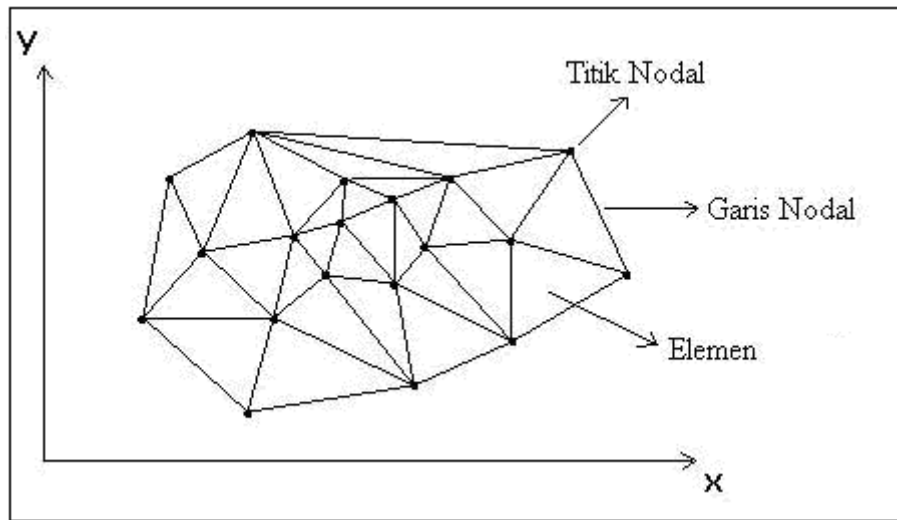
Metode elemen hingga (*Finite Element Method*) merupakan metode yang didalamnya diterapkan prinsip-prinsip kalkulus. Konsep dasar metode elemen hingga adalah prinsip diskritisasi, yaitu membagi suatu benda menjadi benda-benda yang berukuran lebih kecil supaya lebih mudah pengelolaannya (C.S. Desai, 1979). Sebagai contoh dalam perhitungan luas lingkaran. Luas lingkaran

didekati dengan menggambarkan segi banyak di dalam lingkaran. Semakin banyak jumlah sisi, maka akan semakin mendekati luas lingkaran yang sebenarnya. Berikut digambarkan pendekatan luas lingkaran yang berjari-jari satu satuan panjang.



Gambar 2.8. Evaluasi pendekatan luas lingkaran ($r = 1$ satuan panjang)

Metode elemen hingga melakukan pendekatan terhadap harga-harga yang tidak diketahui (u) pada setiap titik-titik secara diskrit, dimulai dari pemodelan suatu benda dengan membagi-bagi dalam bagian/elemen yang kecil yang secara keseluruhan masih mempunyai sifat sama dengan benda yang utuh sebelum terbagi dalam bagian yang kecil. Elemen inilah yang disebut sebagai *finite element*. Diskritisasi domain solusi menjadi elemen-elemen tidaklah harus teratur, ukuran dan jenis elemen dapat berbeda. Pemilihan elemen yang digunakan tergantung pada karakteristik sistem massanya. Misalnya untuk suatu struktur yang berbentuk batang maka elemen yang dipakai adalah elemen garis. Untuk massa berbentuk plat dapat dipilih bentuk elemen segitiga atau segiempat.



Gambar 2.9. Diskritisasi Domain Solusi Kasus 2-D dengan Elemen Segitiga

Diskritisasi tersebut dapat diterapkan pula pada endapan batubara. Berdasarkan data elevasi *roof* dan *floor* batubara maka batubara dapat didiskritisasi dengan menggunakan elemen segitiga, segiempat, dan sebagainya. Endapan batubara dapat ditaksir secara kuantitatif melalui masing-masing elemen tersebut. Dengan menghitung luas atau volume, maka jumlah cadangan batubara dapat diperoleh.

A. Pemodelan Endapan Batubara Berdasar Model Deterministik

Pemodelan endapan batubara bertujuan untuk menggambarkan atau menyatakan endapan batubara secara sistematis untuk memudahkan proses evaluasi terhadap endapan tersebut secara kuantitatif. Pemodelan secara deterministik mencakup tiga tahapan yang dilakukan, yaitu pemodelan konseptual, pemodelan matematik, dan pemodelan numerik (Widodo, 2004).

Pemodelan konseptual merupakan pemodelan endapan batubara yang direpresentasikan secara kualitatif, misalnya menggunakan kontur struktur bidang perlapisan batubara. Pemodelan konseptual dapat pula dilakukan dengan cara

diskritisasi terhadap endapan batubara menggunakan elemen-elemen dua dimensi maupun tiga dimensi.

Pemodelan matematik endapan batubara dapat didefinisikan sebagai pernyataan matematik berkait dengan endapan batubara, yaitu berupa topografi, struktur batubara, serta distribusi parameter kualitas batubara. Peta struktur batubara merupakan medan tempat distribusi titik-titik kedudukan/ketinggian atap/*roof* dan lantai/*floor* lapisan batubara. Pernyataan matematik tentang distribusi titik-titik tersebut dapat berupa fungsi garis (1-D) dan fungsi bidang (2-D) atap atau lantai lapisan batubara. Demikian juga untuk parameter kualitas batubara.

Dilakukannya pemodelan deterministik pada endapan batubara dikarenakan beberapa hal sebagai berikut :

- a. Endapan batubara dapat digolongkan sebagai endapan yang sederhana dengan *state variable* dianggap kontinu sehingga sesuai dengan pemodelan matematika deterministik. Demikian juga halnya dengan ekspresi geometri endapan batubara dapat dimodelkan dengan pemodelan deterministik.
- b. Model deterministik memungkinkan pemodelan endapan batubara secara menyeluruh, mulai dari pemodelan konseptual, pemodelan matematika, dan pemodelan numerik, sehingga dengan menggunakan metode elemen hingga endapan batubara dapat digambarkan secara diskrit menjadi elemen-elemen dengan volume tertentu.

Metode elemen hingga merupakan solusi numerik persamaan differensial yang didasarkan pada kalkulus dengan fungsi *state variable* yang kontinu. Fungsi *state variable* dapat didefinisikan sebagai ekspresi matematik dari medan distribusi *state variable*, misalnya distribusi titik-titik (kordinat) permukaan lapisan batubara (*roof*), dimana dapat dilekatkan atribut berupa nilai-nilai tertentu seperti ketebalan, parameter kualitas, dan elevasi. Masing-masing *state variable* dapat dinyatakan dengan fungsi satu dimensi maupun dua dimensi.

B. Pemodelan Matematik Endapan Batubara dengan Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga dapat diterapkan untuk estimasi sumberdaya/cadangan batubara, dimana distribusi *state variable* pada endapan batubara dianggap konstan terhadap waktu (Widodo, 2004), sehingga fungsi *state variable* pada endapan batubara bersifat *steady state*. Untuk penerapan kasus 2-D dapat dinyatakan dengan model matematik sebagai berikut :

$$L(u) \equiv \nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

u merupakan *state variable* tidak bebas (dapat berupa elevasi, ketebalan, maupun kualitas batubara), sedangkan x dan y adalah *state variable* bebas yang berupa koordinat. Persamaan (2.1) menyatakan bahwa *state variable* u bervariasi secara spasial saja.

Untuk endapan batubara diasumsikan tebal batubara bervariasi terhadap ruang atau bervariasi secara spasial, sehingga tebal batubara dapat ditetapkan sebagai *state variable* dengan distribusi spasial berdasar persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$L(t) \equiv \nabla^2 t(x, y) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

Solusi analitik persamaan (2.2) dapat didekati dengan metode elemen hingga yang didasarkan pada metode residual terbobot dengan formula estimasi (aproksimasi) berikut:

$$\hat{t} = \sum_{j=1}^N t_j \phi_j(x, y) \quad (2.3)$$

\hat{t} harus memenuhi kondisi batas domain solusi. $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_N(x, y)$ merupakan fungsi-fungsi basis yang bebas linier yang besarnya tergantung dari geometri elemen yang digunakan. Untuk elemen segitiga dengan 3 titik vertex, maka fungsi basis bersifat linier, sehingga persamaan (2.3) dengan elemen segitiga merupakan estimasi berbasis kombinasi linier. Dalam persamaan (2.3), \hat{t} hanya merupakan solusi pendekatan dari persamaan (2.2) atau $L(\hat{t}) \neq 0$, oleh karena itu didapatkan :

$$\hat{R}(x, y) = L(\hat{t}) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) disebut residual, yang diperoleh dengan cara mensubstitusi \hat{t} ke dalam persamaan (2.2). Untuk memperoleh solusi dengan akurasi yang tinggi, maka harga residual ini dalam keseluruhan domain solusi (R) harus minimum dan secara matematis dinyatakan:

$$r = \frac{\iint_{(R)} W \hat{R} dx dy}{\iint_{(R)} W dx dy} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) menyatakan residual rata-rata terbobot untuk mengukur residual total dalam domain solusi (R). Parameter $W(x, y)$ merupakan fungsi pembobot atau *weighting function*. Untuk orde N , maka akan terdapat fungsi bobot sebanyak :

$$W_1(x, y), W_2(x, y), \dots, W_N(x, y) \quad (2.6)$$

Fungsi-fungsi pembobot ini dipilih sedemikian rupa, sehingga residual total dalam domain solusi akan mempunyai harga sama dengan nol dan dinyatakan:

$$\iint_{(R)} W_i L(\hat{t}) dx dy = 0 \quad , (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

Substitusi persamaan (2.2) ke dalam persamaan (2.7) dan dengan menggunakan formula Green akan didapatkan persamaan berikut:

$$\iint_{(R)} W_i L(\hat{t}) dx dy = \iint_{(R)} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{t}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (2.8)$$

Substitusi persamaan (2.3) ke dalam persamaan (2.8) akan diperoleh sistem persamaan linier simulatan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{t}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{t}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

\hat{t} adalah harga *state variable* yang dicari melalui estimasi menggunakan metode elemen hingga. Matriks $[A]$ mempunyai elemen sebagai berikut :

$$A_{ij} = \iint_{(R)} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.10)$$

Berdasar metode Galerkin, fungsi-fungsi basis dalam persamaan (2.3) digunakan sebagai fungsi-fungsi pembobot menggantikan persamaan (2.6), sehingga persamaan (2.10) dapat diubah menjadi:

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^M \iint_{(R_m)} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.11)$$

Penelitian ini menggunakan elemen segitiga untuk bidang dua dimensi, di mana merupakan suatu pendekatan linier terhadap besaran yang tidak diketahui (u).

Fungsi polinomial pada elemen segitiga dapat dipergunakan sebagai fungsi pendekatan karena cukup sederhana dan mudah untuk perumusan elemen hingga.

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.12)$$

untuk elemen segitiga dengan tiga titik, maka nilai u dapat diperoleh dengan persamaan linier sebagai berikut :

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \text{ atau } \{q_1\} = [A_1] \{ \alpha \}$$

Kemudian persamaan di atas dapat diturunkan menjadi

$$\{ \alpha \} = [A_1]^{-1} \{q_1\} \quad (2.13)$$

di mana $[A_1]^{-1}$ adalah invers matrik dari A_1

$$[A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \text{ adjoint dari } [A_1] \text{ dibagi dengan determinan dari } [A_1]$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & b_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Tinjau kembali pada persamaan (1) $u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$, dapat pula ditulis

$$u = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \text{ atau } u = [1 \ x \ y] \{ \alpha \}, \text{ substitusikan } \alpha \text{ ke persamaan (2.13)}$$

$$u = [1 \ x \ y] [A_1]^{-1} \{q_1\}$$

$$u = [1 \ x \ y] \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u = 1/\Delta \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y & a_2 + b_2x + c_2y & a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

di mana :

$$N_1 = 1/\Delta (a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$N_2 = 1/\Delta (a_2 + b_2x + c_2y)$$

$$N_3 = 1/\Delta (a_3 + b_3x + c_3y)$$

Δ = determinan dari matrik A_1

$$a_i = x_2y_3 - x_3y_2, \quad b_i = y_2 - y_3, \quad c_i = x_3 - x_2,$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_2 - x_3$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1,$$

Bila u dianggap sebagai besaran yang dicari (tidak diketahui), maka fungsi interpolasinya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u &= N_1u_1 + N_2u_2 + \dots + N_mu_m \\ &= [N] \{q\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

di mana,

u_1, u_2, \dots, u_n = besaran yang dicari pada titik-titik nodal

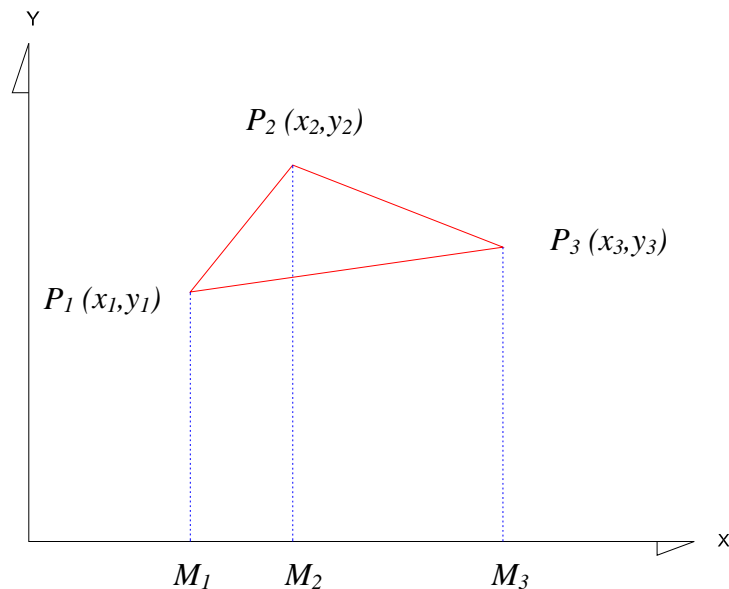
N_1, N_2, \dots, N_m = fungsi interpolasi

$[N]$ = matriks fungsi interpolasi

Setelah semua langkah tersebut dilakukan, maka dapat diketahui nilai-nilai dari besaran u yang tidak diketahui di semua simpul yaitu $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$.

Penentuan Luas Segitiga

Fungsi basis elemen segitiga disimbolkan dengan A . Misalkan titik-titik kordinat pada elemen segitiga diberi nama dengan P_1, P_2, P_3 , masing-masing koordinat (x_1, y_1) (x_2, y_2) dan (x_3, y_3) . Fungsi-fungsi basis dalam hubungannya dengan ketiga node tersebut didefinisikan sebagai fungsi basis linier yang mempunyai ekspresi sebagai berikut :



Gambar 2.10. Penentuan Luas Elemen Segitiga dengan Fungsi Basis Orde Satu

Luas segitiga pada gambar 3.11 dapat dinyatakan dalam titik-titik kordinat sebagai berikut :

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3) \quad (2.15)$$

Penentuan luas (A) elemen segitiga tersebut dapat dibuktikan dengan cara sederhana yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\text{Luas Segitiga} &= \text{Luas trapesium } M_3P_3P_2M_2 + \text{Luas Trapesium } M_2P_2P_1M_1 - \\
&\quad \text{Luas Trapesium } M_3P_3P_1M_1 \\
&= \frac{1}{2} (x_3 - x_1) (y_1 + y_3) + \frac{1}{2} (x_2 - x_3) (y_2 + y_3) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3)
\end{aligned}$$

Luas segitiga tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk determinan sebagai berikut:

$$\text{Luas Segitiga (A)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.16)$$