

BAB II

TEORI DASAR

2.1. Renormalisasi

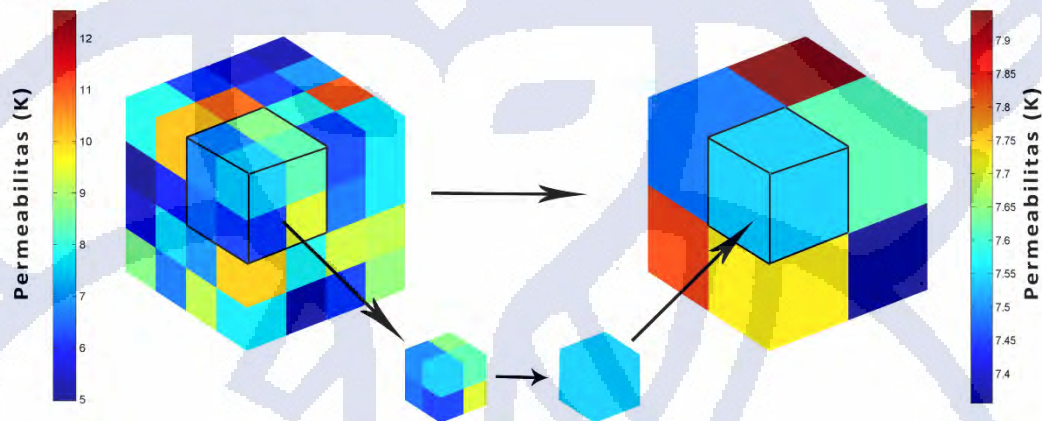
Batuan berpori umumnya memiliki formasi yang heterogen dari skala mikrometer seperti ukuran saluran pori hingga skala kilometer seperti ukuran reservoir. Oleh karena itu, penelitian terhadap setiap proses aliran yang berkaitan dengan produksi hidrokarbon dan hal – hal lainnya tidak cukup dilakukan hanya menggunakan satu model saja. Model Geologi kemudian dibuat untuk merepresentasikan heterogenitas tersebut dan juga memungkinkan penelitian yang lebih rinci.

Aspek heterogenitas yang berhubungan dengan sifat fisis pada studi petrofisika sangat bergantung pada pola atau formasi sedimen. Sedangkan pola aliran sangat dipengaruhi oleh kompleksitas struktur dalam reservoir. Maka dalam hal ini penting bagi kita untuk dapat membuat sebuah model geologi yang memiliki resolusi tinggi dan mampu merepresentasikan struktur – struktur geologis serta sifat – sifat fisis dengan baik.

Kemampuan komputasi telah memungkinkan kita untuk membuat model geologi dengan skala sel yang lebih kecil (*fine – scale*) dari resolusi model geologi asli. Namun model ini cenderung memiliki sel volumetrik yang sangat banyak. Bahkan suatu model geologi *fine – scale* ini dapat tersusun atas 10 juta sel – sel volumetrik (Join, S. P. E, 2015). Sedangkan kemampuan komputasi kita hingga saat ini belum mampu menggunakan data tersebut. Akibatnya, simulasi aliran biasanya dilakukan pada model dengan skala sel yang lebih besar (*coarse – scale*) dibandingkan model geologi tersebut. Meski model ini memiliki bentuk yang lebih sederhana dibandingkan model geologi, model ini terbilang cukup untuk digunakan dalam memprediksi pola aliran dan respon reservoir dengan tingkat akurasi yang dibutuhkan dalam membuat keputusan bisnis tertentu. Untuk alasan – alasan inilah dibutuhkan suatu teknik analitik dan numerik yang bisa menyelesaikan masalah tersebut.

Upscaling atau homogenisasi menurut Lie (2014) adalah proses untuk mentransformasikan model skala kecil yang memiliki resolusi spasial tinggi menjadi model representatif skala besar yang memiliki resolusi spasial rendah. Dalam proses ini, daerah yang heterogen dalam reservoir digantikan dengan daerah yang homogen untuk membuat model sederhana (*coarse model*) dari reservoir yang sama. Dengan

kata lain, sifat fisis dalam sel – sel pada daerah tersebut dirata – ratakan menjadi satu nilai efektif untuk tiap sel pada model representatifnya. Metode perata – rataan yang harus dilakukan bergantung pada sifat fisis yang ditinjau. Sifat fisis yang aditif seperti porositas dapat dirata-ratakan dengan metode perata-rataan volumetric yang sederhana. Sedangkan menurut Chiles & Delfiner (2009), sifat fisis yang tidak aditif seperti permeabilitas memerlukan metode perata-rataan yang khusus.



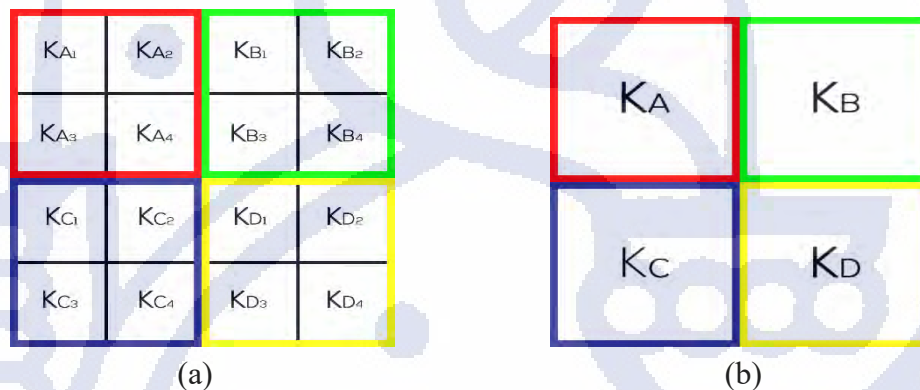
Gambar II. 1. Proses up – scaling untuk menggantikan suatu model *fine – scale* menjadi model homogen *coarse – scale* (Lie, 2014).

Hingga saat ini, sudah banyak metode *Upscaling* yang telah dikembangkan seperti *Pressure – Solver Methods*, *Directional effective Permeabilities*, *Full – Tensor Effective Permeabilities*, *power – law averaging method*, *harminc – arithmetic mean techniques*, *homogenization theories*, *power – law averaging method*, dan juga metode renormalisasi (Christie, 1996). Dari metode – metode tersebut, metode renormalisasi menjadi fokus dalam penelitian ini.

Metode Renormalisasi merupakan metode yang cepat namun tidak begitu akurat bila dibandingkan metode yang lain. Metode ini dipelopori oleh King (1989) pada tahun 1989, beliau menggunakan analogi jaringan resistor untuk menuliskan solusi perhitungan permeabilitas efektif dari rangkaian sel 2×2 . Sejak saat itu, perkembangan metode renormalisasi menghasilkan berbagai metode perhitungan baik untuk model dua dimensi maupun model tiga dimensi dengan tingkat akurasi dianggap lebih teliti dan memungkinkan perhitungan pada kondisi yang lebih kompleks. Beberapa metode yang telah dikembangkan dan akan ditinjau dalam penelitian ini adalah metode King (1989), Metode Green & Patterson (2007), dan metode Karim & Krabbenhoft (2010).

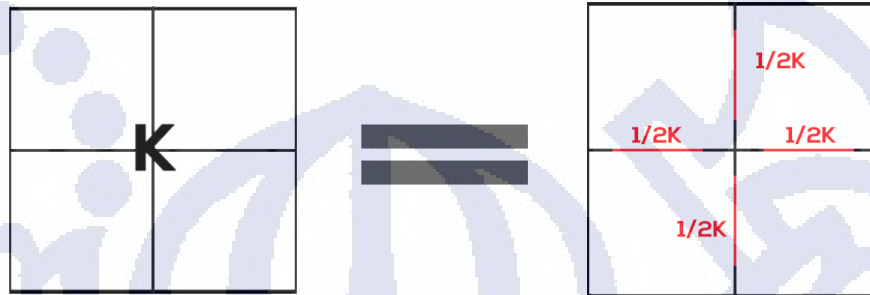
2.2. Metode Renormalisasi King (1989)

King memelopori metode perhitungan renormalisasi untuk menghitung permeabilitas efektif dengan menurunkan suatu persamaan numerik. Mengikuti konsep Kadanoff, (1993), penghitungan permeabilitas efektif ini dilakukan dengan melakukan renormalisasi pada tiap daerah lokal dalam distribusi spasial. Misalkan kita memiliki distribusi spasial permeabilitas dua dimensi seperti pada Gambar II.2.a. Pada tiap daerah lokal yang terdiri dari 4 sel tersebut (ditunjukkan oleh daerah yang dibatasi garis – garis berwarna, setiap warna merepresentasikan tiap daerah lokal) dilakukan proses renormalisasi. Hasil renormalisasi ini menghasilkan satu nilai permeabilitas efektif dari tiap daerah lokal tersebut, sehingga menghasilkan distribusi spasial dengan variasi permeabilitas yang lebih sederhana seperti ditunjukkan pada Gambar II.2.b. Hal ini membuat proses estimasi permeabilitas efektif menjadi lebih sederhana dan lebih akurat. Prosedur tersebut dapat diulang kembali pada distribusi spasial yang baru sehingga pada akhirnya didapatkan satu nilai permeabilitas efektif yang merepresentasikan distribusi spasial tersebut.



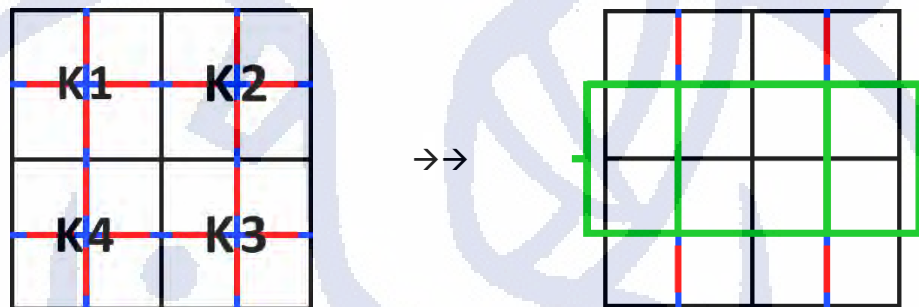
Gambar II. 2. Ilustrasi prosedur renormalisasi pada tiap daerah lokal untuk menghasilkan distribusi spasial yang lebih sederhana (King, 1989)

Dalam penurunan metode numerik untuk renormalisasi ini, King (1989) membuat model blok permeabilitas yang ekuivalen dengan suatu jaringan resistor dengan memberikan syarat batas yaitu tiap sisi samping berada pada nilai tekanan yang sama. Maka, nilai resistor ekuivalen pada titik tengah dari tiap sisi bernilai $1/K$ untuk sel dengan permeabilitas K . Nilai ini ekuivalen dengan dua resistor yang dipasang seri pada arah horizontal atau vertikal melalui titik tengah dengan nilai $1/(2K)$. Maka, kita dapat menggantikan tiap sel dengan sistem resistor yang disusun saling menyilang seperti pada Gambar II. 3.



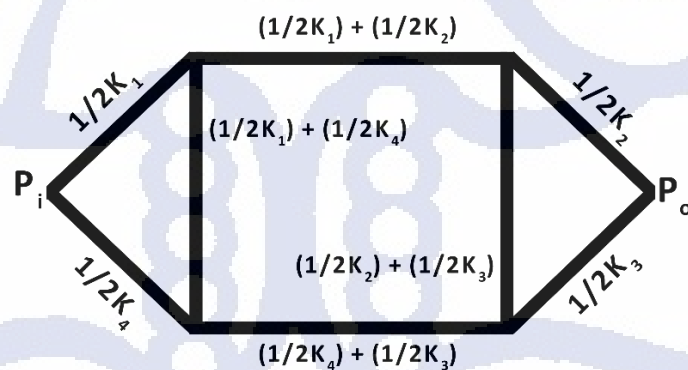
Gambar II. 3. Model jaringan resistor dari suatu sel dengan nilai permeabilitas K yang dibuat oleh (King, 1989)

Dalam penurunan ini, King (1989) menganggap model permeabilitas ini merupakan model isotropik, sehingga perhitungan permeabilitas efektif dilakukan hanya pada satu arah saja, yaitu arah horizontal. Sekarang kita buat distribusi spasial permeabilitas dan model jaringan resistornya seperti pada Gambar II.4.



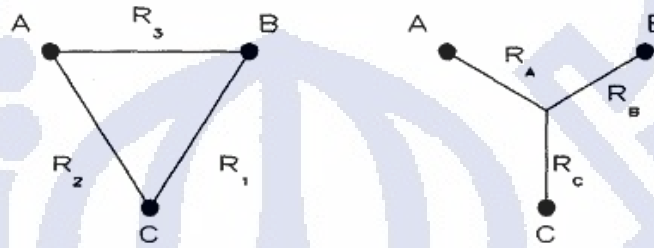
Gambar II. 4. Model sistem jaringan resistor ekuivalen dari blok permeabilitas dengan 4 sel (King, 1989)

Kemudian kita potong lintasan aliran yang tertutup dan kita sambungkan tiap titik dalam tekanan yang sama sehingga menghasilkan jaringan resistor ekuivalen seperti pada Gambar II.5



Gambar II. 5. Sistem jaringan resistor ekuivalen (King, 1989)

Jaringan resistor ini kemudian dapat kita sederhanakan dengan menggunakan transformasi *star – triangle* untuk memberikan jaringan resistor yang terdiri dari rangkaian seri dan paralel seperti pada Gambar II.6

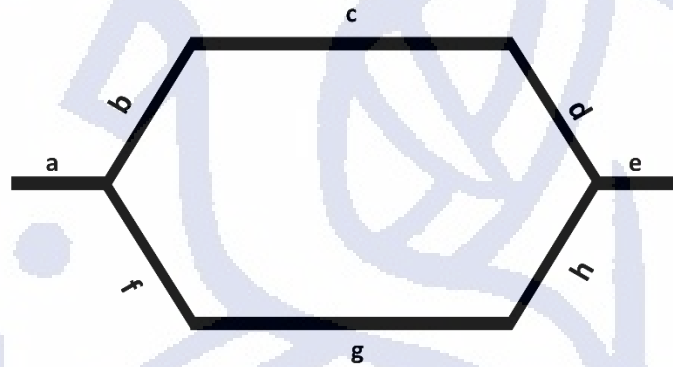


Gambar II. 6. Transformasi Star Triangle (King, 1989)

Sehingga dari transformasi ini, kita dapatkan persamaan:

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (\text{II.1})$$

$$R_1 = \frac{R_B R_C + R_C R_A + R_A R_B}{R_A} \quad (\text{II.2})$$

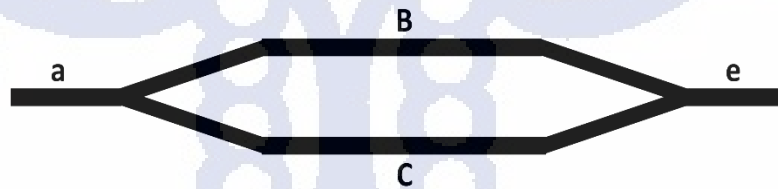


Gambar II. 7. Sistem jaringan resistor hasil transformasi (King, 1989)

$$a = \frac{1}{4(K_1 + K_3)}, \quad b = \frac{1}{4K_1}, \quad c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right), \quad d = \frac{1}{4K_2} \quad (\text{II.3})$$

$$e = \frac{1}{4(K_2 + K_4)}, \quad f = \frac{1}{4K_3}, \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_4} \right), \quad h = \frac{1}{4K_4} \quad (\text{II.4})$$

Rangkaian ini kemudian dapat disederhanakan kembali menjadi



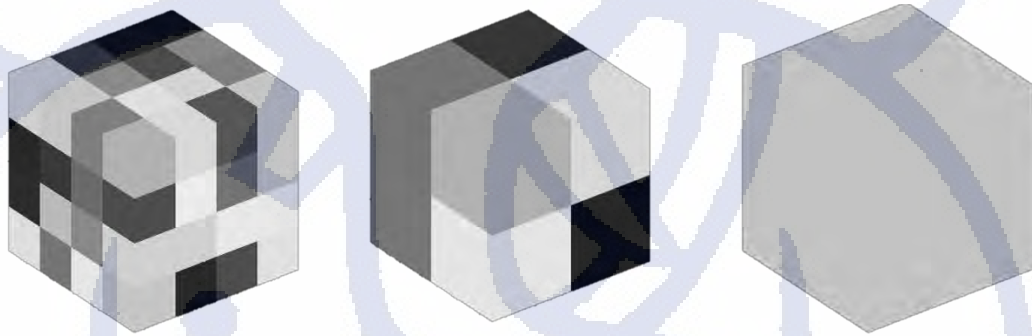
Gambar II. 8. Sistem jaringan resistor setelah disederhanakan (King, 1989)

$$a = \frac{1}{4(K_1 + K_3)}, \quad e = \frac{1}{4(K_2 + K_4)}, \quad B = \frac{3K_1 + K_2}{4K_1 K_2}, \quad C = \frac{3K_3 + 4}{4K_3 K_4} \quad (\text{II.5})$$

Sehingga dari seluruh persamaan diatas, kita dapat sederhanakan lagi menjadi satu resistor tunggal dengan konduktansi bernilai :

$$\begin{aligned}
& K_{eff2D}(K_1, K_2, K_3, K_4) \\
&= 4(K_1 + K_3)(K_2 + K_4)[K_2 K_4(K_1 + K_3) + K_1 K_3(K_2 + K_4)] \\
&\times \left\{ \frac{[K_2 K_4(K_1 + K_3) + K_1 K_3(K_2 + K_4)][K_1 + K_2 + K_3 + K_4]}{+3(K_1 + K_2)(K_3 + K_4)(K_1 + K_3)(K_2 + K_4)} \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{II.6}$$

Perhitungan renormalisasi tersebut dilakukan untuk tiap daerah distribusi permeabilitas lokal atau tiap 4 sel permeabilitas pada seluruh daerah pada area yang kita tinjau sehingga akan dihasilkan area dengan distribusi permeabilitas baru dengan jumlah blok yang berkurang dan variasi permeabilitas yang mengecil. Proses ini dilakukan berulang kali hingga didapatkan satu area homogen dengan satu nilai permeabilitas efektif, diilustrasikan pada Gambar II.9

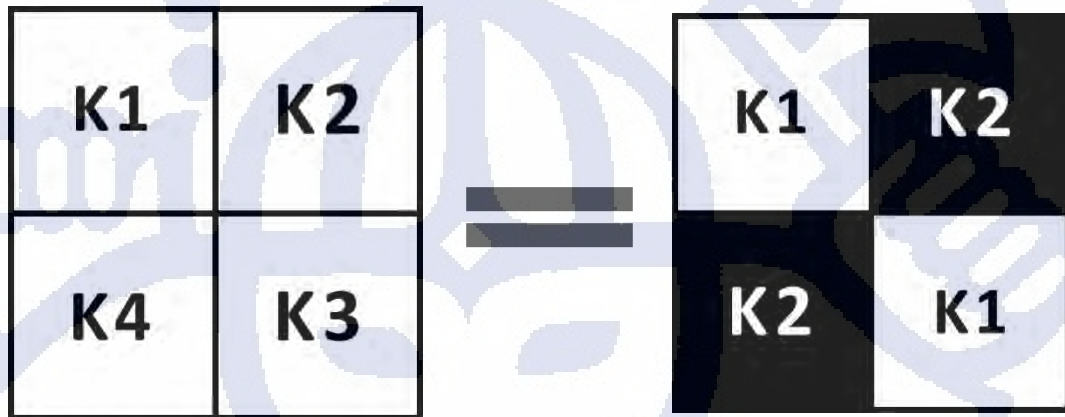


Gambar II. 9. Contoh hasil renormalisasi tiga dimensi dari suatu distribusi spasial hingga didapat satu nilai permeabilitas efektif

Menurut publikasi penelitiannya, King (1989) membandingkan metode yang ia buat tersebut dengan hasil perhitungan simulasi numerik oleh berbagai metode lain yang dilakukan secara langsung untuk sejumlah data. King (1989) menemukan galat maksimum yang ia dapatkan adalah mencapai sekitar 7% untuk kondisi distribusi spasial permeabilitas yang rumit.

Hasil renormalisasi dengan menggunakan metode King (1989) menunjukkan bahwa metode renormalisasi cocok dengan teknik lainnya untuk data reservoir sintetik dan data reservoir asli. Pada data distribusi dengan selisih nilai permeabilitas yang kecil di antara dua sel yang bersinggungan, metode King (1989) memberikan hasil yang baik. Namun untuk suatu distribusi spasial yang terdapat selisih permeabilitas cukup besar antara dua sel yang bersinggungan, model ini memberikan aproksimasi yang kurang baik dengan galat yang besar, seperti yang dibuktikan oleh Yeo & Zimmerman (2001) pada perhitungan hasil renormalisasi untuk distribusi data dua dimensi berukuran

2 x 2 dengan perbandingan nilai permeabilitas K_1 dan K_2 yang begitu besar pada konfigurasi yang ditunjukkan oleh Gambar II.11 di bawah ini



Gambar II. 10. Konfigurasi distribusi spasial yang digunakan dengan K_1 dan K_2 berbanding 1:1000 (Yeo & Zimmerman, 2001)

Meskipun perhitungan renormalisasi yang telah dijelaskan sebelumnya diturunkan melalui sistem dua dimensi, prosedur penurunan yang sama juga dapat diaplikasikan untuk sistem tiga dimensi agar menghasilkan jaringan resistor yang ekuivalen sehingga kemudian dapat kita turunkan persamaan numerik untuk perhitungan permeabilitas efektif pada sistem tiga dimensi. Namun menurut King (1989), prosedur ini tidak menghasilkan persamaan matematis yang sederhana dan efektif untuk diaplikasikan dalam melakukan proses renormalisasi.

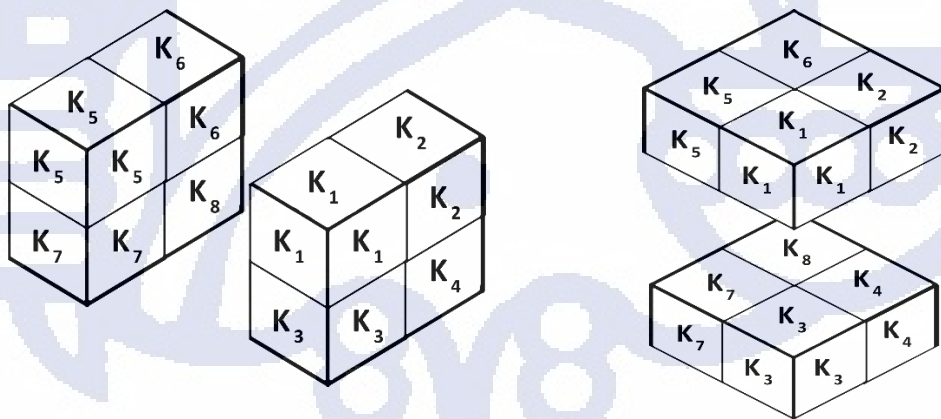
Untuk perhitungan renormalisasi tiga dimensi menggunakan metode King (1989) yang dilakukan pada penelitian ini, digunakan persamaan numerik renormalisasi tiga dimensi yang telah diturunkan oleh Irayani (2014). Mengikuti skema yang diberikan oleh King (1989), didapatkan persamaan matematis yang dapat digunakan untuk melakukan renormalisasi tiga dimensi. Meski begitu, dalam penurunan tersebut memang terlihat bahwa hasil penurunan ini tidak memberikan bentuk persamaan yang sederhana. Green & Patterson (2007) melampirkan kompleksitas penurunan persamaan sistem resistor untuk sistem tiga dimensi tersebut dengan menunjukan bahwa semakin banyaknya jumlah sel yang memiliki permeabilitas yang berbeda, semakin banyak operator + (*plus*) yang akan dihasilkan pada persamaan numerik seperti ditunjukkan pada tabel II.1. Penjelasan lebih rinci mengenai penurunan ini dapat ditemukan pada bagian **lampiran A**.

Tabel II. 1. Jumlah operator + (plus) terhadap jumlah sel yang memiliki permeabilitas yang berbeda pada sistem tiga dimensi (Green & Patterson, 2007)

Jumlah sel yang memiliki nilai permeabilitas yang berbeda	Jumlah operator + (plus)
1	4
2	26
3	7800
4	35413
5	150194
6	165631
7	185878
8	282842

2.3. Metode Renormalisasi Green dan Patterson

Mengacu pada tidak sederhananya persamaan numerik tiga dimensi yang dibuat oleh King (1989), Green & Patterson (2007) mengajukan suatu solusi analitik untuk perhitungan renormalisasi tiga dimensi yang lebih sederhana menggunakan konsep metode renormalisasi King (1989) dua dimensi. Mereka menggunakan asumsi bahwa aliran fluida mengalir dari titik tengah suatu sel ke titik tengah sel yang bersinggungan. Untuk konfigurasi kubus berukuran $2 \times 2 \times 2$ sel, asumsi tersebut memperbolehkan kita membagi kubus tersebut menjadi dua bagian yang ditunjukkan oleh gambar II.11.



Gambar II. 11. Pembagian kubus $2 \times 2 \times 2$ sel (Green dan Patterson, 2007)

Dengan membagi seperti pada gambar diatas, didapatkan empat distribusi spasial berukuran 2×2 sel yang merupakan sebuah bangun dua dimensi. Dari sini, kita dapat menerapkan Persamaan II.6 yang merupakan solusi persamaan renormalisasi dua dimensi oleh King (1989). Kita dapatkan solusi permeabilitas efektif untuk distribusi tiga dimensi didapatkan dengan merata – ratakan secara aritmatik hasil permeabilitas efektif dari keempat bangun dua dimensi tersebut.

$$\begin{aligned}
K_{eff3D}(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8) = & \frac{1}{4} [K_{eff2D}(K_1, K_2, K_3, K_4) \\
& + K_{eff2D}(K_5, K_6, K_7, K_8) \\
& + K_{eff2D}(K_5, K_6, K_1, K_2) \\
& + K_{eff2D}(K_7, K_8, K_3, K_4)]
\end{aligned}
\tag{II.7}$$

Hasil renormalisasi dengan persamaan analitik diatas dibandingkan dengan hasil perhitungan permeabilitas efektif dari blok tiga dimensi menggunakan teknik *Finite Difference* yang diberikan oleh Aziz & Settari (1983). Pengujian dilakukan sebanyak 100 kali simulasi pada reservoir sintetik yang dibuat dengan membuat distribusi permeabilitas yang mengikuti aturan *Fractional Brownian Motion* dan *Fractional Levy Motion*, dan juga pada data permeabilitas yang dihasilkan dengan menggunakan distribusi normal dan log normal. Nilai permeabilitas efektif yang dihasilkan selama 100 kali simulasi untuk tiap reservoir sintetik tersebut dirata – ratakan secara aritmatik. Hasil renormalisasi rata - rata yang dilakukan pada distribusi spasial blok tiga dimensi berukuran $8 \times 8 \times 8$ sel diberikan pada tabel berikut.

Tabel II. 2. Perbandingan rata – rata dan standar deviasi hasil perhitungan renormalisasi untuk beberapa data reservoir sintetik. *Analytical* menunjukkan hasil oleh Persamaan II.7, sedangkan *Numerical* menunjukan hasil oleh metode King (Green & Patterson, 2007)

Distribusi	Analitik		Numerik	
	μ_r	σ_r	μ_r	σ_r
fBm ($H = 0,25$)	1,001	0,015	1,033	0,014
fBm ($H = 0,5$)	0,994	0,020	1,018	0,019
fLm ($H = 0,5 \ \alpha = 1,5$)	0,986	0,025	1,014	0,023
fLm ($H = 0,5 \ \alpha = 1,2$)	0,985	0,027	1,015	0,028
fLm ($H = 0,5 \ \alpha = 1,0$)	0,984	0,050	1,019	0,049
Normal($\mu = 2 \ \sigma = 0,5$)	1,001	0,002	1,004	0,002
LogNormal($\mu = 2 \ \sigma = 0,5$)	1,002	0,006	1,012	0,006

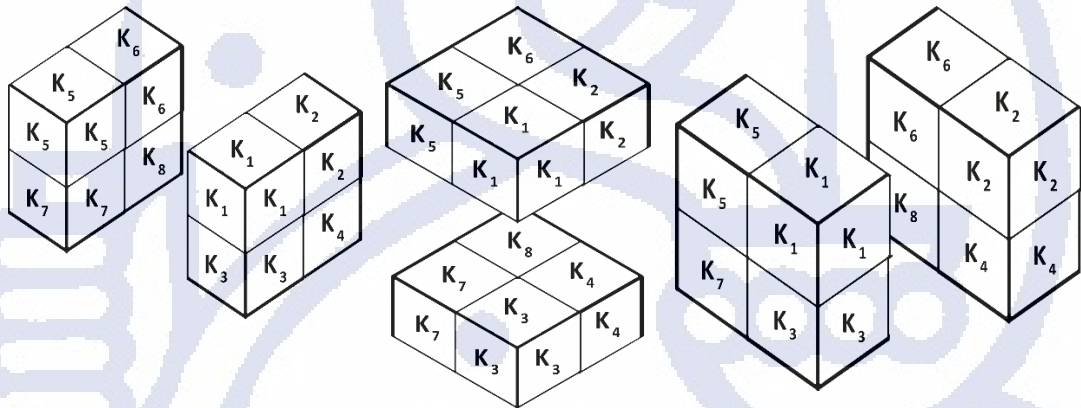
Hasil yang ditunjukkan pada tabel II. 2 tersebut menunjukkan bahwa nilai yang permeabilitas efektif yang didapat dengan menggunakan Persamaan (II.7) hanya berbeda 3% dari hasil yang didapatkan secara numerik. Green dan Patterson juga menguji kecepatan perhitungannya dan menemukan bahwa perhitungan analitik tersebut relatif lebih cepat dibandingkan perhitungan numeriknya. Ini menyatakan bahwa persamaan tersebut dapat diimplementasikan dalam perhitungan renormalisasi, dengan akurasi yang baik dan perhitungan yang lebih cepat.

Pada uraian diatas, Green dan Patterson membagi tinjauan kubus menjadi 2 bagian seperti Gambar II.11 sehingga diperoleh 4 bentuk dua dimensi yang kemudian dengan

menggunakan persamaan renormalisasi 2 dimensi King (1989), maka didapatkan Persamaan (II.7). Pada penelitian ini juga, ditinjau bagaimana bila kita bagi kubus tersebut menjadi 3 bagian dari pada menjadi dua bagian. Dari sini maka didapatkan 6 bentuk dua dimensi seperti ditunjukkan oleh Gambar II.12. Dengan menggunakan perumusan renormalisasi dua dimensi King (1989) pada bentuk ini, didapatkan persamaan analitik tiga dimensi baru yang ditunjukkan oleh Persamaan II.8.

$$\begin{aligned}
 K_{eff3D}(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8) = & \frac{1}{6} [K_{eff2D}(K_1, K_2, K_3, K_4) \\
 & + K_{eff2D}(K_5, K_6, K_7, K_8) \\
 & + K_{eff2D}(K_5, K_6, K_1, K_2) \\
 & + K_{eff2D}(K_7, K_8, K_3, K_4) \\
 & + K_{eff2D}(K_5, K_7, K_1, K_3) \\
 & + K_{eff2D}(K_6, K_8, K_2, K_4)]
 \end{aligned} \quad (II.8)$$

Untuk penelitian ini, persamaan II.8 diatas akan dianalisis dan akan kita nyatakan sebagai *Modifikasi Metode Green dan Patterson*.



Gambar II. 12. Pembagian kubrik 2 x 2 x 2 sel menjadi enam bentuk dua dimensi

2.4. Metode Renormalisasi Karim dan Krabbenhoft

Renormalisasi yang dikembangkan oleh Karim & Krabbenhoft (2010) adalah metode yang meninjau konsep perataan konduktivitas. Konsep perataan yang digunakan adalah perataan aritmatik, perataan harmonik, dan perataan geometrik. Untuk suatu nilai konduktivitas tidak negatif dengan $K = (K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)$, perataan arimatiknya adalah :

$$\mu_a(K) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n} = K_a \quad (II.9)$$

Sedangkan perata – rataan harmoniknya adalah

$$\mu_h(K) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i \right)^{-1} = [\mu_a(K^{-1})]^{-1} = K_h \quad (\text{II.10})$$

Perata – ratahan ini memberikan suatu nilai batas bawah dan batas atas untuk suatu konduktivitas efektif sebagai berikut

$$K_h \leq K_e \leq K_a \quad (\text{II.11})$$

Untuk perata – ratahan geometriknya diberikan oleh rumus:

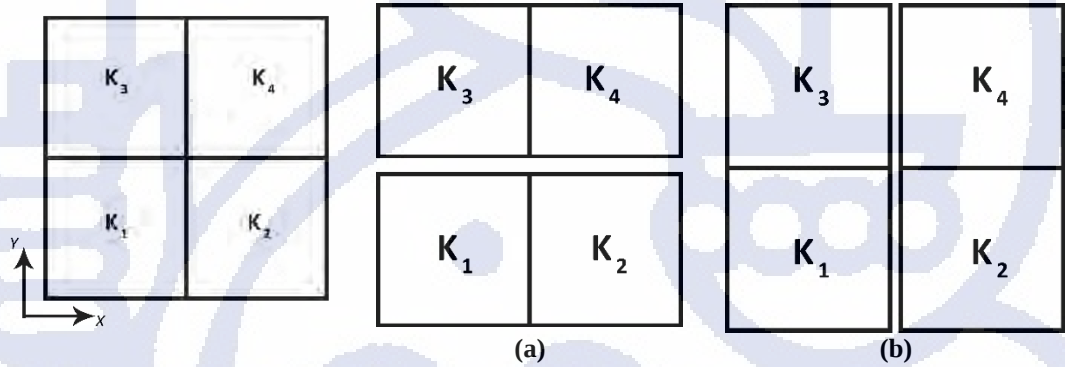
$$\mu_g(K) = \left(\prod_{i=1}^n K_i \right)^{\frac{1}{n}} = (K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n)^{\frac{1}{n}} = \exp[\mu_a(\ln K)] = K_g \quad (\text{II.12})$$

Sehingga dari sini, didapatkan hubungan perata – ratahan aritmatik, harmonik, dan geometrik sebagai berikut

$$K_h \leq K_g \leq K_a \quad (\text{II.13})$$

$$K_h \leq \mu_g(K_a, K_h) \leq K_a \quad (\text{II.14})$$

Karim & Krabbenhoft (2010) melakukan penurunan persamaan renormalisasi dengan pertama membagi 4 sel konduktivitas seperti Gambar II. 13. Dari cara pembagian ini, didapatkan dua pendekatan solusi untuk konduktivitas eksaknya, dengan solusi untuk pembagian seperti pada gambar (a) adalah



Gambar II. 13. Prosedur pembagian bangun dua dimensi menjadi dua bagian (Karim & Krabbenhoft, 2010)

$$\begin{aligned} K_{L,x} &= \mu_a [\mu_h(K_1, K_3), \mu_h(K_2, K_4)] \\ &= \frac{K_1 K_2 (K_3 + K_4) + K_3 K_4 (K_1 + K_2)}{(K_1 + K_2)(K_3 + K_4)} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Sedangkan untuk pembagian pada gambar (b) solusinya adalah

$$K_{U,x} = \mu_h [\mu_a(K_1, K_3), \mu_a(K_2, K_4)] = \frac{(K_1 + K_3)(K_2 + K_4)}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} \quad (\text{II.16})$$

Persamaan (II.15) dan (II.6) di atas menyatakan batas atas dan batas bawah nilai konduktivitas eksak. Batasan ini mirip dengan batas aritmatik dan harmonik, yang

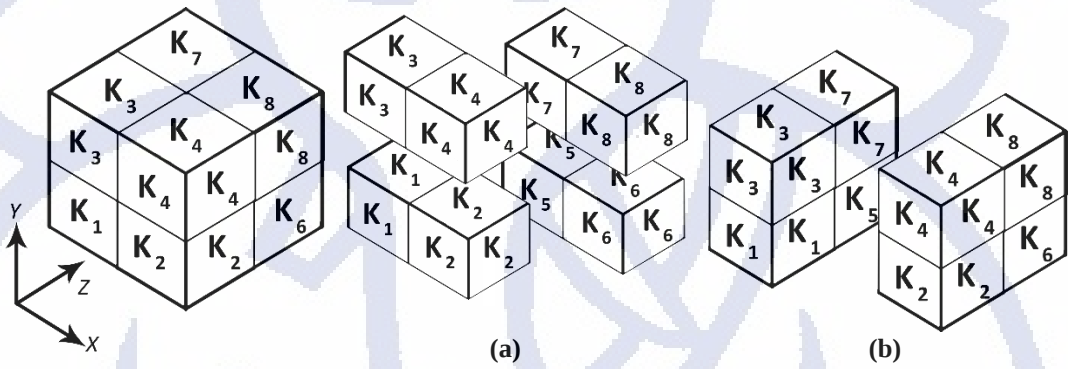
kemudian dapat kita temukan bahwa estimasi yang lebih akurat didapatkan oleh perataan geometrik dari kedua batas tersebut. Persamaan ini dapat dituliskan sebagai:

$$K_{e,x} = (K_{L,x}, K_{U,x})^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(K_1+K_3)(K_2+K_4)}{(K_1+K_2)(K_3+K_4)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I_3}{I_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.17})$$

$$I_1 = K_1+K_2+K_3+K_4 \quad (\text{II.18})$$

$$I_2 = K_1K_2(K_3+K_4) + K_3K_4(K_1+K_2) \quad (\text{II.19})$$

Mengikuti struktur solusi eksak dua dimensi pada bagian sebelumnya, solusi tiga dimensinya dapat diturunkan dengan cara yang sama dengan membagi bangun kubus menjadi dengan cara sebagai berikut:



Gambar II. 14. Prosedur pembagian bangun tiga dimensi menjadi dua bagian (Karim & Krabbenhoft, 2010)

Sama seperti cara sebelumnya, blok konduktivitas dibagi dengan dua cara. Untuk konfigurasi (a), solusi konduktivitasnya:

$$\begin{aligned} K_{L,x} &= \mu_a [\mu_h(K_1, K_3), \mu_h(K_2, K_4), \mu_h(K_5, K_6), \mu_h(K_7, K_8)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{K_1K_2S_{12} + K_3K_4S_{34} + K_5K_6S_{56} + K_7K_8S_{78}}{(K_1+K_2)(K_3+K_4)(K_5+K_6)(K_7+K_8)} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Dengan :

$$S_{ij} = \frac{(K_1+K_2)(K_3+K_4)(K_5+K_6)(K_7+K_8)}{K_i+K_j} \quad (\text{II.21})$$

Sedangkan untuk konfigurasi (b), kita dapatkan solusi:

$$\begin{aligned} K_{U,x} &= \mu_h [\mu_a(K_1, K_3, K_5, K_7), \mu_a(K_2, K_4, K_6, K_8)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(K_1+K_3+K_5+K_7)(K_2+K_4+K_6+K_8)}{K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6+K_7+K_8} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Sehingga perataan geometriknya memiliki solusi:

$$K_{e,x} = (K_{L,x}, K_{U,x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{(K_1+K_3 + K_5+K_7)(K_2+K_4 + K_6+K_8)}{(K_1+K_2)(K_3+K_4)(K_5+K_6)(K_7+K_8)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{J_5}{I_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.23})$$

Dengan :

$$I_1 = K_1+K_2 + K_3+K_4 + K_5+K_6 + K_7+K_8 \quad (\text{II.24})$$

$$J_5 = K_1K_2S_{12} + K_3K_4S_{34} + K_5K_6S_{56} + K_7K_8S_{78} \quad (\text{II.25})$$

Untuk implementasi numerik, bentuk Persamaan (II.22) dapat dituliskan kedalam bentuk yang lebih sederhana yaitu:

$$K_{e,x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_4} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{K_5} + \frac{1}{K_6} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} \right)^{-1}}{(K_1+K_3 + K_5+K_7)^{-1}(K_2+K_4 + K_6+K_8)^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.26})$$

