BAB II TINJAUAN PUSTAKA

II.1. Mekanika Fluida

Zat yang tersebar di alam dibedakan dalam tiga keadaan (fase), yaitu fase padat, cair dan gas. Karena fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan sesuatu bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut fluida. Fluida adalah zat-zat yang mampu mengalir dan menyesuaikan diri dengan bentuk tempatnya. Salah satu ciri fluida adalah jarak molekulnya tidak tetap, ini disebabkan oleh lemahnya ikatan antara molekul penyusunnya. Mekanika fluida adalah cabang ilmu pengetahuan yang mengkaji tentang perilaku dari zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak. Pada mekanika fluida, dipelajari perilaku fluida dalam keadaan diam (statistika fluida), di mana tidak adanya tegangan geser yang bekerja pada partikel fluida tersebut, dan fluida dalam keadaan bergerak (dinamika fluida). [1]

Fluida statis adalah fluida yang tidak bergerak atau dalam keadaan diam, misalnya air dalam gelas. Dalam fluida statis kita mempelajari hukum-hukum dasar antara lain mengenai tekanan hidrostatis, hukum Archimedes, tegangan permukaan dan kapilaritas. Dinamika fluida adalah subdisiplin dari mekanika fluida yang mempelajari fluida bergerak. Fluida terutama cairan dan gas. Penyelesaian dari masalah dinamika fluida biasanya melibatkan perhitungan banyak sifat dan ciri dari fluida, seperti kecepatan, kepadatan, tekanan, dan suhu sebagai fungsi ruang dan waktu. Dinamika fluida menawarkan struktur matematika yang membawahi beberapa disiplin praktis tentang fluida bergerak yang juga seringkali memerlukan hukum empirik dan semi-empirik, diturunkan dari pengukuran arus, untuk menyelesaikan masalah praktikal.

II.2. Sifat-Sifat Fluida

Fluida merupakan zat yang bisa mengalir, yang mempunyai partikel yang mudah bergerak dan berubah bentuk tanpa pemisahan massa. Ikatan antar partikel fluida sangat kecil, hingga dapat dengan mudah mengikuti bentuk ruangan atau tempat yang membatasinya. Fluida dibedakan atas zat cair dan gas. Sifat umum dari zat cair dan gas adalah tidak melawan perubahan bentuk dan tidak mengadakan reaksi terhadap gaya geser. Ada beberapa sifat fluida yang penting, yaitu: rapat massa, berat jenis, kemampatan fluida, kekentalan, tegangan permukaan.

II.2.1. Rapat Massa dan Berat Jenis

Rapat massa adalah massa fluida persatuan volume pada temperatur dan tekanan tertentu. Disimbolkan dengan ρ (*rho*).

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.1}$$

Berat jenis benda (γ) sebagai distribusi massa dalam ruang. Berat jenis benda adalah hasil kali antara rapat massa dan percepatan gravitasi, dengan persamaan [1]

$$\gamma = \rho \, . \, g \tag{2.2}$$

Dimana

$\gamma =$ berat jenis (N/m2 untuk satuan SI, atau kg/m3 untuk satuan MKS)

ρ = rapat massa (kg/m3 untuk SI, atau kgm untuk MKS)

g = percepatan gravitasi (m/s2)

II.2.2. Kemampatan Fluida

Kemampatan fluida adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan (penambahan) tekanan. Kondisi tersebut ditunjukkan oleh perbandingan antara perubahan tekanan dan perubahan terhadap volume awal. Perbandingan ini dikenal dengan modulus elastisitas. Bila dp adalah pertambahan tekanan dan dV adalah pengurangan volume dari volume awal V, maka:

$$K = \frac{dp}{dV/V} \tag{2.3}$$

Apabila ditinjau benda dengan volume V dan massa m maka persamaan (2.1) dapat dideferensialkan menjadi

$$d\rho = d\left(\frac{m}{V}\right) = -\frac{m}{V^2}\,dV = -\rho\,\frac{dV}{V} \tag{2.4}$$

atau

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \tag{2.5}$$

Sehingga :

$$K = -\frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \tag{2.6}$$

Persamaan di atas menunjukkan, harga K tergantung pada tekanan dan rapat massa. Karena rapat massa dipengaruhi temperatur, maka harga K juga tergantung pada perubahan temperatur selama pemampatan. Apabila terjadi perubahan pada temperatur konstan, maka disebut dengan Ki (modulus elastisitas isothermal). Apabila tidak terjadi transfer panas selama proses perubahan, maka disebut dengan Ka (modulus elastisitas adiabatik). Pada zat cair dan padat, Ka = Ki. Harga K untuk zat cair sangat besar, hingga perubahan rapat massa karena perubahan tekanan sangat kecil, sehingga perubahan rapat massa zat cair sering diabaikan, dan dianggap sebagi zat tak kompresibel atau tak termampatkan. Tetapi pada kondisi tertentu di mana perubahan tekanan sangat besar dan mendadak, maka dianggap zat cair tak kompresibel. Gas mempunyai harga K yang sangat kecil dan tidak konstan, sehingga modulus elastisitas tidak digunakan dalam analisis gas. Pada gas, sangat mudah sekali terjadi pemampatan, sehingga gas dianggap sebagai zat yang termampatkan.[1]

II.2.3. Kekentalan Fluida

Kekentalan adalah sifat dari fluida untuk melawan tegangan geser pada waktu bergerak atau mengalir atau suatu pernyataan “tahanan untuk mengalir” dari suatu sistem yang mendapatkan suatu tekanan. Viskositas merupakan besaran yang mengukur kekentalan fluida, [5]. Kekentalan disebabkan karena kohesi antara partikel fluida, untuk fluida ideal dianggap tidak mempunyai kekentalan. Dalam hal ini kekentalan membahas tentang gesekan antara lapisan-lapisan fluida yang bergerak terhadap satu dengan lainnya. Kekentalan gas bertambah seiring dengan naiknya suhu sedangkan kekentalan cairan berkurang seiring dengan naiknya suhu. Hal tersebut disebabkan karena tahanan suatu fluida terhadap tegangan geser bergantung pada kohesinya dan pada laju perpindahan momentum molekulernya. Cairan dengan molekul-molekul yang jauh lebih rapat dari pada gas, memiliki gaya-gaya kohesi yang jauh lebih besar daripada gas dan karena kohesi berkuran jika suhu bertambah maka kekentalannyapun demikian. Jadi pada cairan, kohesi merupakan penyebab utama kekentalannya. Sedangkan gas dengan gaya kohesi yang sangat kecil sebagian besar tahanannya terhadap tegangan geser merupakan akibat dari perpindahan momentum molekukarnya, sehingga pada suhu yang tinggi kekentalan gas meningkat karena kegiatan molekularnya tinggi.

Dimensi kekentalan dapat ditentukan dari hukum kekentalan Newton, sebagai berikut :

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.7}$$

Untuk aliran laminar, $\tau_0 = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$, sedangkan untuk perubahan aliran laminar menuju aliran transisi dan turbulen persamaan diperoleh

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.8}$$

Ketika fluida bersifat laminar τ_0 bernilai besar sehingga nilai μ sangat kecil dan sebaliknya ketika μ bernilai besar, maka τ_1 dominan dan τ_0 diabaikan.

Dimana : η = kekentalan (viskositas eddy)

τ = tegangan gesar (N/m^2)

μ = kekentalan (viskositas mutlak atau viskositas dinamik atau viskositas)

$\frac{\partial u}{\partial y}$ = laju pergeseran

Zat cair mempunyai hubungan linear antara tegangan geser dan gradien kecepatan (laju pergeseran) disebut fluida Newton. Pada fluida ideal, tegangan geser adalah nol. Untuk fluida bukan Newton, tegangan geser tidak berbanding lurus dengan gradien kecepatan. Contoh dari fluida kental, di mana mempunyai kekentalan besar adalah sirup, minyak, oli, glyresin, dan lain sebagainya, sedangkan air merupakan contoh dari fluida encer, di mana mempunyai kekentalan kecil.

Bila fluida mengalami geseran, maka fluida mulai bergerak dengan laju regangan yang berbanding terbalik dengan suatu besaran yang disebut koefisien kekentalan (μ), [8].

II.2.4. Tegangan Permukaan

Molekul zat cair saling tarik menarik sesamanya, dengan gaya berbanding lurus dengan massa, dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antara pusat-pusat massa. Gaya tarik menarik tersebut adalah seimbang, tetapi bila pada permukaan antara zat cair dan udara, atau antara zat satu dengan lainnya, gaya tarik ke atas atau ke bawah tidak setimbang. Ketidak setimbangan tersebut menyebabkan molekul-molekul pada permukaan melakukan kerja untuk membentuk permukaan zat cair. Kerja yang diperlukan untuk melawan gaya tarik ke bawah tersebut dikenal dengan tegangan permukaan. Tegangan permukaan, bekerja pada biang permukaan yang sama besar di semua titik [1]

II.3. Aliran Fluida

Telah kita ketahui fluida merupakan sesuatu yang dapat mengalir sehingga sering disebut sebagai zat alir yang berupa zat cair dan gas. Karena fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan suatu bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut fluida. Perilaku dinamika fluida dapat diterapkan hukum-hukum dasar mekanika (Hukum Newton untuk persoalan yang non relativistik). Salah satu cara untuk menjelaskan gerak suatu fluida adalah dengan membagi-bagi fluida tersebut menjadi elemen-elemen volum yang sangat kecil yang dapat dinamakan partikel-partikel fluida, dan mengamati gerak masing-masing pertikel tersebut. Lagrange mengembangkan metode dengan mengamati gerak tiap partikel dalam fluida. Jadi tiap partikel mempunyai parameter berupa posisi atau kordinat x, y, z dan menentukannya sebagai fungsi-fungsi dari waktu t. Kordinat-kordinat x, y, z pada waktu t dari partikel yang berada di x_0, y_0, z_0 pada waktu t_0 akan ditentukan oleh fungsi-fungsi x (x_0, y_0, z_0, t_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t_0, t). Cara lain yang lebih sederhana dikembangkan oleh Euler yang mudah digunakan untuk kebanyakan tujuan dalam pembahasan dinamika fluida, yaitu dengan memandang fluida sebagai medan rapat massa dan medan vektor kecepatan. Jadi gerak fluida di suatu titik (x, y, z) pada saat t dinyatakan dengan rapat massanya ρ (x, y, z, t) dan vector kecepatannya v (x, y, z, t) [2]

Untuk dapat memahami tentang aliran fluida ditinjau ciri-ciri atau karakteristik umum dari aliran fluida sebagai berikut [2]

1. Aliran tunak(steady) atau tak tunak (non steady).

   Aliran fluida dikatakan aliran tunak jika kecepatan setiap partikel di suatu titik selalu sama. Contoh aliran tunak adalah laju aliran fluida yang rendah dan arus yang mengalir tenang.
2. Aliran berotasi (rotational) atau aliran tak berotasi(irratational).

Jika elemen fluida disetiap titik tidak mempunyai kecepatan sudut netto terhadap titik tersebut maka aliran fluida adalah aliran tak berolak. Contoh aliran berolak adalah pusaran air yang biasa disebut gerak vortex.

3. Aliaran fluida termampatkan (compressible) atau tak termampatkan (incompressible).

   Jika fluida yang mengalir mengalami perubahan volum (atau massa jenis) ketika fluida tersebut ditekan, maka aliran fluida itu disebut aliran termapatkan. Sebaliknya, jika fluida yang mengalir tidak mengalami perubahan volum (atau massa jenis) ketika ditekan, maka aliran fluida tersebut dikatakan tak termampatkan. Kebanyakan zat cair yang mengalir bersifat tak-termampatkan.

4. Aliran fluida kental (viscous) dan aliran tak kental (non-viscous).

   Viskositas gerak fluida adalah analogi dari gesekan di dalam gerak benda padat. Makin kental fluida, gesekan antara partikel fluida juga makin besar.

Suatu aliran dikatakan kental bila terjadi gerak relatif antara berbagai lapisan yang bergerak sejajar, terjadi gesekan internal sehingga terjadi disipasi energi. Bila gesekan internal ini tak terjadi maka aliran disebut sebagai aliran tak kental. Aliran internal ini dinyatakan dalam parameter viskositas. Pada aliran tidak kental, aliran fluida dapat dikategorikan :

1. Aliran Laminar

   Aliran laminar merupakan aliran yang bergerak dalam lapisan-lapisan, atau lamina-lamina dengan satu lapisan meluncur secara lancar. Dalam aliran laminar ini viskositas berfungsi untuk meredam kecenderungan terjadinya gerakan relatif antara lapisan. Sehingga aliran laminar memenuhi hukum viskositas Newton yaitu:

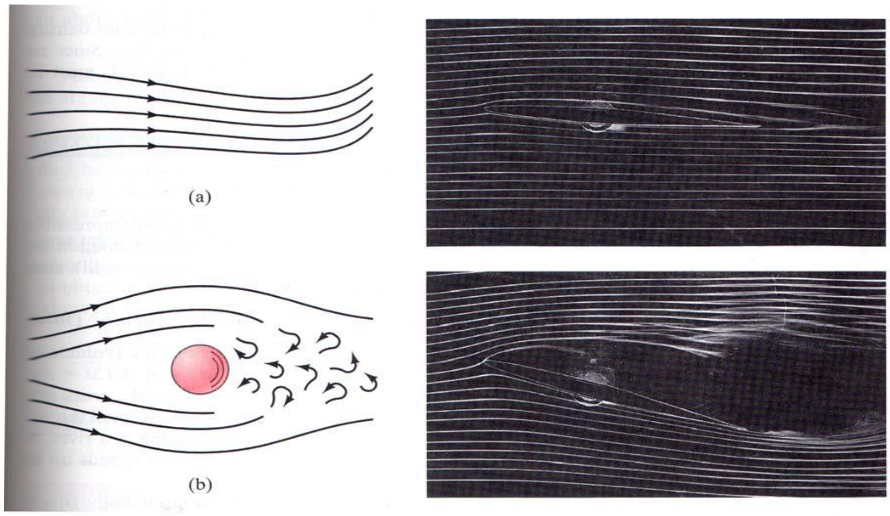
   $$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

2. Aliran Turbulen

   Aliran turbulen merupakan aliran di mana pergerakan dari partikel-partikel fluida sangat tidak menentu karena mengalami percampuran serta putaran partikel antara lapisan, yang mengakibatkan saling tukar momentum dari satu bagian fluida ke bagian fluida yang lain dalam skala yang besar. Dalam keadaan aliran turbulen maka turbulensi yang terjadi membangkitkan tegangan geser yang merata diseluruh fluida sehingga menghasilkan kerugian-kerugian aliran.

3. Aliran Transisi

   Aliran transisi merupakan aliran peralihan dari aliran laminar ke aliran turbulen.



Gambar II. 1 (a) Aliran laminar dan (b) aliran turbulen [5]

II.4. Bilangan Reynolds

Aliran fluida di dalam sebuah pipa mungkin merupakan aliran laminar atau turbulen. Secara kuantitatif , pengelompokan aliran atas aliran laminar dan turbulen dapat dilakukan dengan menghitung suatu parameter tak berdimensi yang sisebut bilangan Reynolds dan didefenisikan sebagai :

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} \tag{2.9}$$

Di mana:

Re = bilangan Reynolds

v = kecepatan (rata-rata) fluida yang mengalir (m/s)

D = diameter dalam pipa (m)

ρ = massa jenis fluida (kg/m^3)

μ = viskositas dinamik fluida (kg/m.s) atau (N.det/m^2)

Dilihat dari kecepatan aliran, menurut Reynolds diasumsikan atau dikategorikan laminar bila aliran tersebut mempunyai bilangan Reynolds kurang dari 2000, untuk aliran transisi berada diantara bilangan Reynolds 2000 dan 4000 biasa juga disebut sebagai bilangan Reynolds kritis, sedangkan aliran turbulen mempunyai bilangan Reynolds lebih dari 4000, tau dapat diklasifikasi menjadi tiga kategori sebagai berikut [8]

- $Re < 2300$ Aliran Laminer
- $2300 < Re < 4000$ Aliran Transisi
- $Re > 4000$ Aliran Turbulen

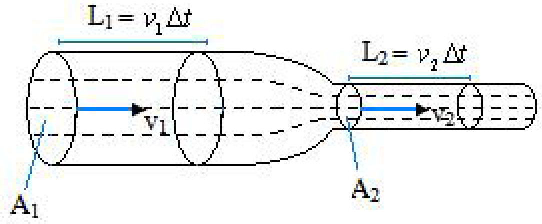
Bilangan Reynolds yang besar menunjukkan aliran yang sangat turbulen dengan kerugian yang sebanding dengan kuadrat kecepatan. Dalam aliran laminar kerugian berbanding lurus dengan kecepatan rata-rata. Aliran laminar didefenisikan sebagai aliran fluida yang bergerak dalam lapisan-lapisan atau lamina-lamina dengan satu lapisan, meluncur secara lancar pada lapisan yang bersebelahan yang saling tukar menukar momentum secara molekular.

II.5. Persamaan Kontinuitas

Untuk lebih memahami persamaan kontinuitas, terlebih dahulu mengetahui konsep garis alir, garis arus , tabung alir dan debit. Pola yang ditempuh sebuah partikel dalam fluida dalam aliran fluida disebut garis alir (flow line). Jika seluruh pola aliran tidak berubah terhadap waktu, aliran disebut aliran tunak (steady flow). Dalam aliran tunak , setiap elemen yang melalui titik tertentu akan mengikuti pola yang sama, maka laju aliran fluida pada berbagai titik dalam ruangan cenderung konstan , meskipun masing-masing partikel dapat berubah baik dalam besar maupun arah selama gerakannya.[6]

Garis alir (streamline) adalah kurva dimana garis singgungnya pada setiap titik adalah arah dari laju fluida pada titik tersebut. Ketika pola aliran berubah terhadap waktu, garis arus tidak akan bertabrakan dengan garis aliran. Aliran fluida di dalam pipa untuk aliran tunak antara garis aliran dan garis arus dianggap identik atau sama. Sedangkan untuk garis aliran yang melalui sudut elemen luas imajiner, yang membentuk tabung disebut tabung alir (flow tube). Dari defenisi garis aliran dalam aliran tunak tidak ada fluida yang dapat melalui sisi dinding tabung aliran, maka dalam tabung aliran yang berbeda tidak dapat bercampur.[7]

Massa fluida bergerak tidak berubah ketika mengalir. Fakta ini menunjukkan hubungan kuantitatif dalam aliran fluida yang disebut persamaan kontinuitas. Kita tinjau aliran fluida pada sebuah pipa yang mempunyai diameter berbeda, seperti tampak pada gambar di bawah.



Gambar II. 2 Fluida yang mengalir pada pipa dengan diameter berbeda [7]

Gambar II.2 menujukan aliran fluida dari kiri ke kanan (fluida mengalir dari pipa yang diameternya besar menuju diameter yang kecil). Garis putus-putus merupakan garis arus. Keterangan gambar : A_1 = luas penampang bagian pipa yang kecepatan aliran fluida pada bagian pipa yang berdiameter besar, v_2 = kecepatan aliran fluida pada bagian pipa yang berdiameter kecil, L = jarak tempuh fluida.

Pada fluida dinamis ada beberapa asumsi yang digunakan untuk membahasnya yaitu aliran fluida yang tak termampatkan, tak kental, tak berolak dan tunak. Untuk aliran tunak, kecepatan aliran partikel fluida di suatu titik sama dengan kecepatan aliran partikel fluida lain yang melewati titik itu. Aliran fluida juga tidak saling berpotongan (garis arusnya sejajar), olehnya itu massa fluida yang masuk ke salah satu ujung pipa harus sama dengan massa fluida yang keluar di ujung lainnya. Jika fluida memiliki massa tertentu masuk pada pipa yang diameternya besar, maka fluida tersebut akan keluar pada pipa yang diameternya kecil dengan massa yang tetap.

Pada Gambar 2.2 di atas, kita tinjau bagian pipa yang diameternya besar dan bagian pipa yang diameternya kecil. Selama selang waktu tertentu, sejumlah fluida mengalir melalui bagian pipa yang diameternya besar (A_1) sejauh L_1 ($L_1 = v_1t$). Volume fluida yang mengalir adalah $V_1 = A_1L_1 = A_1v_1t$. Selama selang waktu yang sama, sejumlah fluida yang lain mengalir melalui bagian pipa yang diameternya kecil (A_2) sejauh L_2 ($L_2 = v_2t$). Volume fluida yang mengalir adalah $V_2 = A_2L_2 = A_2v_2t$. Untuk fluida tak teremampatkan (incompressible), kerapatan atau massa jenis fluida tersebut selalu sama di setiap titik yang dilaluinya. Massa fluida yang mengalir dalam pipa yang memiliki luas penampang A_1 (diameter pipa yang besar) selama selang waktu tertentu adalah :

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V \tag{2.10}$$

$$m_1 = \rho V_1 \rightarrow V_1 = A_1 L_1 = A_1 v_1 t$$

$$m_1 = \rho A_1 V_1 t \tag{2.11}$$

Demikian juga, massa fluida yang mengalir dalam pipa yang memiliki luas penampang A_2 (diameter pipa yang kecil) selama selang waktu tertentu adalah :

$$m_2 = \rho V_2 \rightarrow V_2 = A_2 L_2 = A_2 v_2 t$$

$$m_2 = \rho A_2 v_2 t \tag{2.12}$$

Mengingat bahwa dalam aliran tunak, massa fluida yang masuk sama dengan massa fluida yang keluar,maka :

$$m_1 = m_2$$

$$\rho A_1 v_1 t = \rho A_2 v_2 t \tag{2.13}$$

Massa jenis fluida dan selang waktu sama sehingga diperoleh persamaan kontinuitas untuk fluida tak termampatkan :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2.14}$$

Keterangan :

A_1 = luas penampang 1

A_2 = luas penampang 2

v_1 = kecepatan aliran fluida pada penampang 1

v_2 = kecepatan aliran fluida pada penampang 2.

Persamaan di atas menunjukkan bahwa laju aliran volume alias debit selalu sama pada setiap titik sepanjang pipa/tabung aliran. Ketika penampang pipa mengecil, maka laju aliran fluida meningkat, sebaliknya ketika penampang pipa menjadi besar, laju aliran fluida menjadi kecil. Pada aliran fluida tak termampatkan (*incompressible fluid*), bentuk persamaan kontinuitas adalah [7]

$$\nabla . v = 0 \tag{2.15}$$

Atau dapat dinyatakan dengan koordinat cartesius

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.16}$$

II.6. Persamaan Aliran Fluida di dalam Pipa

II.6.1. Medan Kecepatan dan Percepatan Aliran Fluida

Medan kecepatan dapat digambarkan dengan menentukan kecepatan V di seluruh titik, dan pada seluruh saat, di dalam medan yang ditinjau. Jadi dalam koordinat siku-siku, notasi V (x, y, z, t) memiliki arti bahwa kecepatan dari sebuah partikel fluida tergantung pada dimana letaknya di dalam medan aliran (sebagaimana yang ditunjukkan oleh koordinat-koordinat, x, y, dan z) dan kapan partikel menempati titik itu (sebagaimana yang ditentukan oleh waktu t). Kecepatan dapat dinyatakan dalam tiga komponen yang saling tegak lurus sehingga

$$V = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} \qquad (2.17)$$

Dimana $u, v,$ dan w adalah komponen-komponen kecepatan dalam arah x, y, dan z dan $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ adalah vektor satuan yang bersesuaian. Dengan penggambaran medan kecepatan ini dapat ditunjukkan pula bahwa percepatan sebuah partikel dapat dinyatakan sebagai [3]

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + u\,\frac{\partial V}{\partial x} + v\,\frac{\partial V}{\partial y} + w\,\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (2.18)$$

Dan dalam bentuk komponennya :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (2.19a)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (2.19b)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.19c)$$

Percepatan juga dinyatakan dengan singkat sebagai

$$a = \frac{\nabla V}{\nabla t} \qquad (2.20)$$

Sehingga percepatan sebuah partikel fluida digambarkan dengan menggunakan konsep turunan material.

II.6.2. Persamaan Gerak dan Momentum (Hukum II Newton)

Untuk memperoleh bentuk diferensial dari persamaan momentum linier, dapat diterapkan persamaan $F = \left.\frac{\nabla P}{\nabla t}\right|_{sys}$ terhadap sistem diferensial yang terdiri dari sebuah massa δm. Hal ini akan lebih sederhana menggunakan pendekatan sistem karena penerapan pada massa diferensial , δm menghasilkan [3]

$$\delta F = \frac{\nabla(V\delta m)}{\nabla t} \tag{2.21}$$

Dimana δF adalah gaya resultan yang bekerja pada δm. Dengan menggunakan pendekatan sistem , δm dapat diperlakukan sebagai sebuah konstanta sehingga

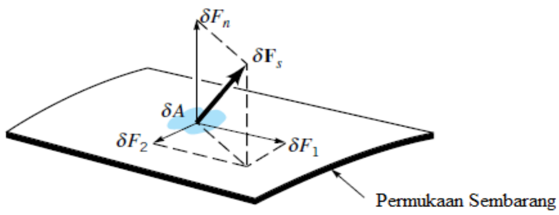
$$\delta F = \delta m \, \frac{\nabla V}{\nabla t} \tag{2.22}$$

dan berdasarkan persamaan 2.20 diperoleh

$$\delta F = \delta m \, a \tag{2.23}$$

Persamaan merupakan penerapan hukum kedua Newton pada massa δm.

Gaya-gaya permukaan bekerja pada elemen sebagai hasil interaksinya dengan sekelilingnya. Pada sembarang tempat di dalam massa fluida, gaya yang bekerja pada luas daerah kecil, δA yang terletak pada sembarang permukaan, dapat dinyatakan sebagai δF_s dan diuraikan menjadi tiga komponen δF_n , δF_1 dan δF_2, dimana δF_n normal terhadap luas daerah δA, dan δF_1 ,δF_2 sejajar dengan luas tersebut serta tegak lurus satu sama lainnya seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.3.



Gambar II. 3 Komponen gaya bekerja pada sebuah bidang diferensial sembarang [3]

Dari gambar diperoleh bahwa tegangan normal

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \tag{2.24}$$

Dan tegangan geser didefenisikan sebagai

$$\tau_1 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} \tag{2.25a}$$

dan

$$\tau_2 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_2}{\delta A} \,. \tag{2.25b}$$

Momentum suatu partikel atau benda adalah perkalian massa (m) dengan kecepatan (v). Partikel-partikel aliran fluida mempunyai momentum. Oleh karena kecepatan aliran berubah baik dalam besarannya maupun arahnya, maka momentum partikel-partikel fluida juga akan berubah. Menurut hukum kedua Newton, diperlukan gaya untuk menghasilkan perubahan tersebut yang sebanding dengan besarnya kecepatan dan perubahan momentum. Sesuai dengan hukum kedua Newton, persamaan gaya untuk dua dimensi dapat ditulis sebagai berikut [3]

$$\delta F_x = \delta m \, a_x \tag{2.26a}$$

$$\delta F_y = \delta m \, a_y \tag{2.26b}$$

Dimana , $\delta m = \rho \delta x \delta y$ dan komponen percepatan diberikan oleh

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.27a}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.27b}$$

Untuk gaya-gaya permukaan akan ditunjukkan pada ara$x$ saja, untuk menyederhanakan analisis. Tegangan-tegangan akan dikalikan dengan luas permukaan dimana gaya tersebut bekerja untuk mendapatkan gaya, sehingga dengan menjumlahkan seluruh gaya dalam arah x ini, diperoleh

$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) \delta x \delta y \tag{2.28a}$$

Dan dalam arah y diberikan

$$\delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right) \delta x \delta y \tag{2.28b}$$

Sehingga persamaan gaya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.29a}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.29b}$$

Untuk memasukkan efek viskos ke dalam analisis diferensial gerakan fluida, maka harus kembali pada persamaan gerak umum yang sebelumnya, yaitu persamaan 2.29. Karena persamaan ini mencakup tegangan dan kecepatan, maka terdapat lebih banyak variabel yang tidak diketahui dari pada jumlah persamaannya, dan oleh karena itu, sebelum berlanjut maka perlu dibentuk suatu hubungan antara tegangan dan kecepatan [3]

II.6.3. Hubungan Tegangan - Deformasi

Untuk fluida Newtonian tak mampu-mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi dan dapat dinyatakan dengan koordinat Cartesian untuk tegangan normal sebagai berikut :

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.30a}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.30b}$$

Dan untuk tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.31}$$

Dimana p adalah tekanan yang merupakan negatif dari rata-rata dua tegangan normal, artinya $-p = (\frac{1}{2})(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. Untuk fluida viskos yang bergerak, tegangan normal tidak selalu harus sama pada arah yang berbeda, sehingga perlu didefenisikan bahwa tekanan sebagai rata-rata dua tegangan normal. Untuk fluida yang diam , atau fluida tanpa gesekan , tegangan normal sama ke seluruh arah [3]

II.6.4. Persamaan Navier-Stokes

Tegangan-tegangan sebagaimana didefenisikan sebelumnya (persamaan 2.30 dan 2.31), dapat disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial gerakan, dengan menyusun kembali persamaan – persamaan tersebut, sehingga membentuk suku-suku percepatan berada di ruas kiri dan suku-suku gaya di ruas kanan. Persamaan inilah yang disebut persamaan Navier-Stokes. Kedua persamaan gerak ini apabila dikombinasikan dengan persamaan kekekalan massa (persamaan 2.26), memberikan suatu gambaran matematis yang lengkap dari aliran fluida Newtonian tak mampu-mampat. Maka diperoleh persamaan untuk arah x [3]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.32a)$$

Dan untuk arah y

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (2.32b)$$

Dari persamaan di atas terdapat tiga variabel yang tidak diketahui (u,v dan p), dan masalah ini secara matematis bisa diselesaikan. Tetapi akibat kerumitan dari persamaan Navier-Stokes (karena merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear, orde dua), maka persamaan – persamaan ini tidak dapat langsung memberikan penyelesaian matematik eksak. Namun demikian, dalam beberapa kasus di mana penyelesaiannya telah didapatkan dan dibandingkan dengan hasil eksperimen, hasil-hasilnya ternyata sangat bersesuaian. Jadi, persamaan Navier Stokes dianggap sebagai persamaan diferensial pengatur dari gerakan fluida Newtonian tak mampu-mampat.[3]

II.7. Aliran Viskos di dalam pipa

Pada umumnya saluran yang digunakan untuk memindahkan fluida dari suatu tempat ke tempat lainnya mempunyai penampang bundar. Saluran ini meliputi pipa-pipa air, selang-selang hidrolik dan saluran lainnya yang dirancang untuk menahan perbedaan tekanan yang sangat besar melintasi dinding-dindingnya tanpa mengakibatkan perubahan bentuk. Pembahasan aliran fluida di dalam pipa diberikan beberapa asumsi untuk menggambarkan sifat-sifat umum aliran fluida yaitu (1) pipa terisi penuh oleh fluida yang mengalir,(2)aliran laminar, (3) aliran fluida ideal yaitu tidak bocor dan tidak ada sumber, (4)aliran tunak dan berkembang penuh. [4]

Pertama kita tinjau aliran di dalam pipa tak hingga yang horizontal seperti pada gambar 2.3. untuk geometri ini partikel-partikel fluida bergerak dalam arah x sepanjang pipa, dan tidak terdapat kecepatan dalam arah y atau z, artinya v=0 dan w=0. Dalam hal ini menurut persamaan kontinuitas $\frac{\partial u}{\partial x}=0.$ Disamping itu, tidak akan terjadi variasi u dalam arah z untuk pipa tak berhingga, dan untuk aliran tunak $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, sehingga $u=u(y)$. Jika kondisi ini digunakan dalam persamaan Navier -Stokes (persamaan 2.32), maka persamaan untuk arah x menjadi,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(0+u.0+0\frac{\partial u}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho.0+\mu\left(0+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

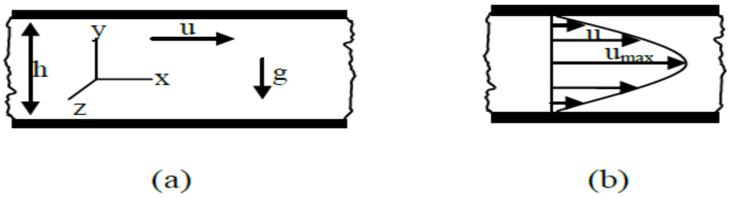
$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (2.33)$$

Dan untuk arah y :

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(0+u.0+0\frac{\partial v}{\partial y}\right)= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_y+\mu(0+0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}= -\rho g \qquad (2.34)$$



Gambar II. 4 (a) sistem koordinat dan notasi yang digunakan dalam analisis, (b) distribusi kecepatan parabolik untuk aliran di dalam pipa. [3]

Dari Persamaan (2.34) dapat ditunjukkan bahwa tekanan hanyalah dalam fungsi x dan ketika persamaan (2.33) diintegralkan terhadap y, perubahan tekanan dapatlah dinyatakan sebagai konstanta. Sehingga :

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x}y+A \qquad (2.35)$$

Dimana A konstanta. Jika diintegralkan lagi akan menjadi,

$$\mu u=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2}+Ay+B \qquad (2.36)$$

di mana B juga merupakan konstanta atau fungsi dari x. Nilai A dan nilai B dapat ditentukan dengan memasukkan kondisi batas untuk kecepatan pada pipa. Telah ditetapkan sebelumnya, bahwa kecepatan horizontal pada pipa adalah nol, yaitu u = 0 pada y = 0 dan y = ± h, di mana h merupakan jari-jari pipa maka persamaan (2.36) menjadi

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - h^2) \tag{2.37}$$

Persamaan (2.37) di atas menggambarkan sebuah profil kecepatan parabolik. (Penyelesaian persamaan dilihat pada lampiran 1)

Ketika μ dalam hal ini sebagai fungsi u yaitu μ(u) diperoleh persamaan kecepatan yang memberikan hubungan antara kecepatan dengan jarak terhadap sumbu y sebagai berikut

$$u = (By - Ay^2) \tag{2.38}$$

Dari persamaan (2.37) dapat pula diperoleh laju volume aliran(q), yang melewati pipa sebagai berikut

$$q = \int_{-h}^{h} u dy = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - h^2)dy$$

atau

$$q = -\frac{2h^3}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{2.39}$$

Gradien tekanan $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ adalah negatif, karena tekanan berkurang dalam arah aliran. Jika kita tetapkan Δp mewakili penurunan tekanan antara dua titik yang terpisah sejauh *l* , maka

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.40}$$

Dan persamaan (3.7) dapat dinyatakan sebagai

$$q = -\frac{2h^3}{3\mu}\frac{\Delta p}{l} \tag{2.41}$$

Aliran sebanding dengan gradient tekanan , dan berbanding terbalik dengan viskositas dan sangat tergantung pada lebar celah (~h^3). Jika dinyatakan dalam kecepatan rata-rata, dimana v = q/2h, maka persamaan (2.41) menjadi

$$v = \frac{h^2}{3\mu}\frac{\Delta p}{l} \tag{2.42}$$

Berdasarkan persamaan (2.41) dan (2.42) diperoleh hubungan-hubungan dalam penurunan tekanan sebanjang pipa dan laju aliran atau kecepatan rata-rata. Kecepatan maksimum, u_{max} terjadi di tengah-tengah pipa yaitu pada y = 0, sehingga dari persamaan (2.37)

$$u_{max} = -\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \text{ atau}$$

$$u_{max} = \frac{3}{2}v \qquad (2.43)$$

Untuk fluida dan tekanan acuan yang diberikan p_0, tekanan pada setiap titik dapat diperkirakan . Contoh relatif sederhana dari penyelesaian eksak ini mengilustrasikan informasi mengenai medan aliran yang dapat diperoleh. Aliran akan laminar jika bilangan reynoldsnya (Re) = ρv(2h)/μ, tetap kurang dari 1400. [3]

Dari persamaan 2.37 dapat dihitung aliran masuk pada sisi masuk (inlet) dan keluar (outlet) melalui pendekatan analisis dimensi untuk aliran massa persatuan luas untuk untuk kecepatan masuk sebesar 1 m/s dan massa jenis 1 kg/m3, aliran massa per satuan luas tidak lain adalah h tinggi lapisan batas atau jari-jari pipa. Dengan mengintegralkan persamaan (2.37) maka dapat diperoleh aliran massa pada outlet (Penyelesaian persamaan dilihat pada lampiran 2)

$$\int dh = \int_{y=0}^{h} u\,dy \qquad (2.44)$$

yang dapat diubah untuk memberikan ekspresi terhadap perubahan tekanan :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -12\,\frac{\mu}{h^2} \qquad (2.45)$$

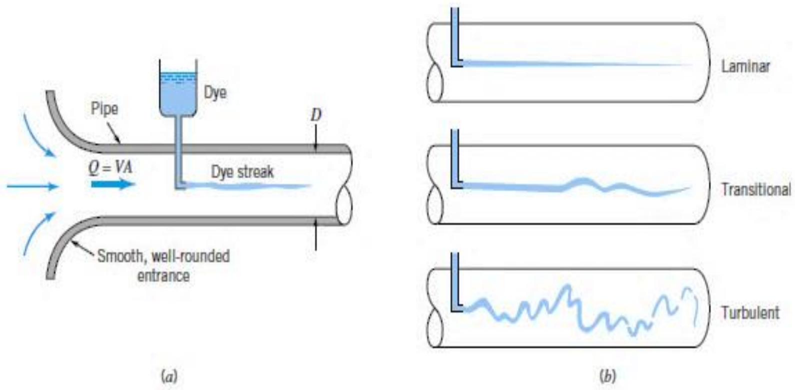
Persamaan (2.45) dapat membuat gradien tekanan untuk aliran yang berkembang penuh, untuk laju aliran massa yang telah ditentukan dan dapat digunakan kembali pada persamaan (2.37) untuk menghasilkan profil kecepatan untuk aliran yang sama. Dengan mensubstitusi persamaan (2.45) kedalam persamaan (2.37), maka diperoleh (Penyelesaian persamaan dilihat pada lampiran 1)

$$u = 6(y - y^2) \qquad (2.46)$$

Persamaan (3.8) hanya digunakan pada pengujian program persamaan kecepatan yang memberikan hubungan antara kecepatan dengan jarak terhadap sumbu y .

II.7.1. Aliran Laminar dan Aliran Turbulen

Aliran fluida di dalam sebuah pipa mungkin merupakan aliran laminar atau turbulen . Osborne Reynolds (1842-1912) adalah orang yang pertama kali membedakan dan mengklasifikasikan dua aliran ini dengan menggunakan peralatan sederhana seperti yang ditunjukkan pada gambar II.5

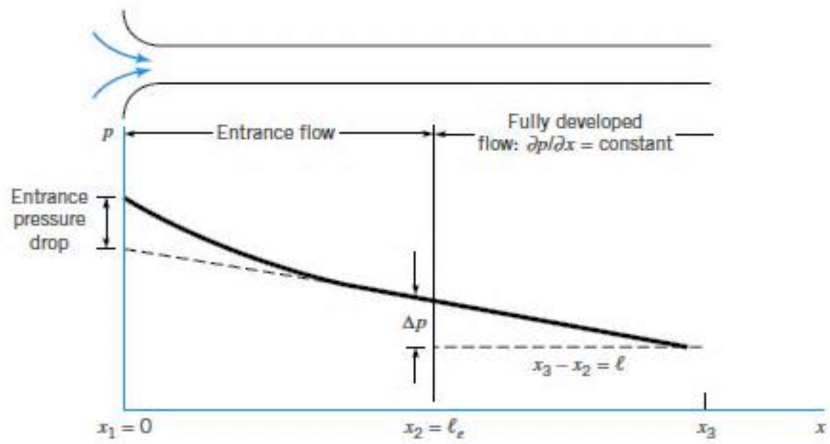


Gambar II. 5 (a) Eksperimen untuk mengilustrasikan jenis aliran
(b) Guratan zat pewarna yang khas.[4]

Aliran laminar terjadi pada partikel – partikel (massa molar yang kecil) fluida bergerak dalam lintasan lintasan yang sangat tidak teratur, mengakibatkan pertukaran momentum dari suatu bagian ke bagian yang lainnya. Turbulensi membangkitkan tegangan geser yang lebih besar di seluruh fluida dan mengakibatkan lebih banyak ketamampubalikan (irreversibilitas). Kecenderungan kearah ketidakstabilan dan turbulensi diredam oleh gaya-gaya viskos yang memberikan hambatan terhadap gerakan relatif lapisan-lapisan fluida yang bersebelahan. Aliran laminar mengikuti hukum Newton tentang tegangan viskositas, yang menghubungkan tegangan geser dengan laju perubahan bentuk sudut. Aliran laminar tidak stabil dalam situasi yang menyangkut gabungan viskositas yang rendah, kecepatan tinggi, atau aliran yang besar, serta berubah menjadi aliran turbulen. Sifat pokok aliran, yaitu laminar dan turbulen serta posisi relatifnya pada skala yang menunjukkan pentingnyasecara relatif kecenderungan turbulen terhadap kecenderungan laminar ditunjukkan oleh bilangan Reynolds [3]

II.7.2. Tekanan dan Tegangan Geser

Beda tekanan ($\Delta p = p_1 - p_2$) antara satu bagian pipa horizontal mendorong fluida mengalir melewati pipa. Efek viskos memberikan efek gaya penghambat sehingga mengimbangi gaya tekan, jika efek viskos tidak ada dalam aliran, tekanan akan konstan diseluruh pipa. Dalam daerah aliran yang tidak berkembang penuh, seperti pada daerah masuk sebuah pipa, fluida mengalami percepatan atau perlambatan selagi mengalir (profil kecepatan berubah dari profil seragam pada bagian masuk pipa menjadi profil berkembang penuh pada ujung akhir daerah masuk), pada daerah masuk terdapat keseimbangan antara gaya-gaya tekanan, viskos dan inersia (percepatan). Hasilnya adalah distribusi tekanan sepanjang pipa horizontal seperti yang ditunjukkan pada gambar II.6 di bawah ini



Gambar II. 6. Distribusi tekanan sepanjang pipa horizontal [4]

Besarnya gradient tekanan, $\partial p/\partial x$ lebih besar didaerah masuk dari pada di daerah berkembang penuh, dimana gradien tersebut merupakan sebuah konstanta Sifat alamiah aliran pipa sangat bergantung apakah aliran tersebut laminar atau turbulen.

II.8. CFD (Computational Fluid Dinamics)

Computational Fluid Dynamics (CFD) adalah metode penghitungan dengan kontrol dimensi, luas dan volume dengan memanfaatkan bantuan komputasi komputer untuk melakukan penghitungan pada tiap-tiap elemen pembaginya. Prinsipnya adalah suatu ruang yang berisi fluida yang akan dilakukan penghitungan dibagi menjadi beberapa bagian, hal ini sering disebut dengan sel dan prosesnya dinamakan *meshing*. Bagian-bagian yang terbagi tersebut merupakan sebuah kontrol penghitungan yang akan dilakukan adalah aplikasi. Kontrol-kontrol penghitungan ini beserta kontrol-kontrol penghitungan lainnya merupakan pembagian ruang atau *meshing*. Pada setiap titik kontrol penghitungan akan dilakukan penghitungan oleh aplikasi dengan batasan domain dan *boundary condition* yang telah ditentukan.

Prinsip inilah yang banyak dipakai pada proses penghitungan dengan menggunakan bantuan komputasi computer.[10]

CFD adalah penghitungan yang mengkhususkan pada fluida. Mulai dari aliran fluida, *heat transfer* dan reaksi kimia yang terjadi pada fluida. Atas prinsip-prinsip dasar mekanika fluida, konservasi energi, momentum, massa, serta species, penghitungan dengan CFD dapat dilakukan. Secara sederhana proses penghitungan yang dilakukan oleh aplikasi CFD adalah dengan kontrol-kontrol penghitungan yang telah dilakukan maka kontrol penghitungan tersebut akan melibatkan dengan memanfaatkan persamaan-persamaan yang terlibat. Persaman-persamaan ini adalah persamaan yang membangkitkan dengan memasukan parameter apa saja yang terlibat dalam domain. Misalnya ketika suatu model yang akan dianalisa melibatkan temperatur berarti model tersebut melibatkan persamaan energi atau konservasi dari energi tersebut. Inisialisasi awal dari persaman adalah *boundary condition*. *Boundary condition* adalah kondisi di mana kontrol-kontrol penghitungan didefinisikan sebagai definisi awal yang akan dilibatkan ke kontrol-kontrol penghitungan yang berdekatan dengannya melalui persaman-persamaan yang terlibat. Secara umum proses penghitungan CFD terdiri atas 3 bagian utama[10]

1. *Preprocessor,*
2. *Solver*
3. *Post processor*

1. Pre-processor

Merupakan bagian input suatu problem fluida ke sebuah program CFD melalui interface dan tranformasi lanjut ke dalam sebuah bentuk yang sesuai untuk solver. Langkah-langkah pengguna dalam tahap pre-processing yaitu :

- Definisi geometri region analisa : domain komputasional
- Pembuatan grid : pemecahan domain menjadi beberapa sub domain yang lebih kecil dan non overlapping : sebuah grid (mesh) atau volume atur/elemen
- Pemilihan fenomena fisik dan kimia yang perlu dimodelkan
- Definisi propertis fluida
- Spesikasikan kondisi batas yang sesuai pada sel-sel yang berhimpit dengan batas domain

Akurasi sebuah solusi CFD ditentukan oleh jumlah sel dalam grid. Secara umum, semakin besar jumlah sel semakin baik akurasi solusi. Baik akurasi solusi dan biaya hardware komputer serta lama kalkulasi tergantung kepada halusnya/rapatnya grid. Mesh-mesh optimal sering merupakan non-uniform : lebih rapat pada area di mana variasi-variasi banyak terjadi dari poin ke poin dan lebih jarang pada region dengan perubahan yang sedikit. Kemampuan teknik (self) adaptive meshing telah membantu pengembangan CFD guna otomatikal penghalusan grid untuk area dengan variasi yang padat. memasukkan model proses fisikal dan kimikal (model turbulence, perpindahan kalor radiatif, pembakaran) bersama persamaan aliran fluida utama. [9]

2. Solver

Terdapat 3 macam teknik solusi numerik : beda hingga (*finite difference*), elemen hingga (*finite element*) dan metode spectral. Kerangka utama metode numerik untuk dasar sebuah solver terdiri dari langkah langkah :

- Aproksimasi variabel-variabel aliran yang tidak diketahui dengan fungsi-fungsi sederhana.
- Diskretisasi dengan substitusi aproksimasi ke dalam persamaan atur aliran dan manipulasi matematis lanjut.
- Solusi persamaan-persamaan aljabar.

Perbedaan utama di antara ketiga macam teknik adalah pada cara aproksimasi variabel-variabel aliran dan proses diskretisasi, pengalian dengan sebuah set fungsi berbobot dan mengintegrasikannya. Hasilnya diperoleh sekumpulan persamaan aljabar untuk koefisien-koefisien tak diketahui dari fungsi-fungsi aproksimasi.[9]

3. Post-processor

Hasil penghitungan modul solver berupa nilai-nilai numerik (angka-angka) variabel-variabel dasar aliran seperti komponen-komponen kecepatan, tekanan, temperatur dan fraksi-fraksi masa. Dalam modul post-processor nilai-nilai numerik ini diolah agar pengguna dapat dengan mudah membaca dan menganalisis hasil-hasil penghitungan CFD. Hasil-hasil ini dapat disajikan dalam bentuk grafis-grafis ataupun kontur-kontur distribusi parameter-parameter aliran fluida. Gaya-gaya yang dikembangkan aliran fluida, Torsi, Daya dan lain sebagainya. Salah satu software CFD adalah Comsol Multiphysics. Di mana pada software Comsol ini metode yang digunakan adalah metode elemen hingga (*Finite element method*). [9]

II.9. Aplikasi dan Metode Numerik dari Persamaan Navier Stokes Pada Aliran Fluida Tunak Laminar.

Ada banyak aplikasi dari persamaan Navier Stokes pada aliran fluida tunak laminar di dalam pipa. Salah satunya adalah aliran fluida di dalam pipa. Dimana dengan menggunakan persamaan Navier-Stokes kita dapat mengetahui gerak dan distribusi baik tekanan maupun kecepatan dari aliran tersebut. Dengan mengetahui berapa besar tekanan dan distribusi kecepatannya, maka dapat dirancang suatu pipa yang sesuai dengan fluida yang dialirkan. Persamaan Navier-Stokes dan persamaan kontinuitas merupakan persamaan–persamaan umum dari gerakan fluida Newtonian tak mampu mampat.[3]

Metode-metode numerik yang menggunakan computer digital dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai jenis persoalan aliran fluida. Meskipun persamaan-persamaan diferensialyang mengatur aliran fluida Newtonian. (persamaan Navier-Stokes) telah diturunkan, hanya sedikit penyelesaian analitik dari persamaan tersebut diketahui. Dengan perkembangan komputer-komputer digital kecepatan tinggi, semakin mungkin bagi kita untuk mendapatkan penyelesaian numerik perkiraan terhadap persamaan ini (dan juga persamaan mekanika fluida lainnya) untuk berbagai variasi keadaan. Dari berbagai teknik yang tersedia untuk penyelesaian numerik dari persamaan-persamaan diferensial pengatur aliran fluida, tiga jenis berikut adalah yang paling banyak digunakan : (1) metode beda hingga (2) metode elemen hingga, dan (3) metode batas hingga. Dalam setiap metode ini medan aliran yang kontinu (misalnya kecepatan atau tekanan sebagai fungsi dari ruang dan waktu) digambarkan dalam nilai-nilai yang diskrit (bukannya kontinu) pada lokasi yang telah ditentukan . Untuk metode elemen hingga (atau volume hingga), medan aliran dipecah menjadi sekumpulan elemen-elemen fluida kecil (biasanya bidang segitiga jika alirannya dua dimensi atau elemen volume kecil jika alirannya tiga dimensi)

Untuk metode elemen batas, batas dari medan aliran dipecah menjadi segmen-segmen diskrit dan singularitas yang sesuai misalnya sumber, serap, doublet, dan vortex-vorteks didistribusikan pada elemem – elemen batas ini. Sedangkan untuk metode beda hingga untuk dinamika fluida komputasi adalah salah satu metode yang mudah dimengerti dan banyak digunakan dibandingkan dengan ketiga metode yang disebutkan diatas. Untuk metode ini medan aliran dibagi-bagi menjadi sehimpunan titik-titik grid dan fungsi kontinu (kecepatan, tekanan, dan sebagainya) yang diperkirakan dengan nilai – nilai diskrit dari fungsi-fungsi ini yang dihitung pada titik-titik grid. Turunan-turunan fungsi dipekirakan dengan menggunakan perbedaan antara nilai fungsi pada titik-titik grid yang bersebelahan dibagi dengan spasi grid. Jadi persamaan diferensial diubah menjadi persamaan aljabar , yang diselesaikan dengan teknik numerik yang sesuai. Semakin banyak jumlah grid yang digunakan , semakin banyak pula jumlah persamaan yang harus diselesaikan. Untuk mendapatkan hasil yang sesuai, maka jumlah grid (menggunakan jaring (mesh) yang lebih rinci) pada tempat dimana gradient-gradien yang besar diperkirakan terjadi, seperti di lapisan batas-batas permukaan padat.[3]