

BAB III KONSEP DASAR METODA ELEMEN HINGGA

Metoda elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan syarat batas yang diekspresikan dalam bentuk persamaan differensial. Metode elemen hingga pada intinya adalah membagi area permasalahan (domain) menjadi banyak area kecil (subdomain). Satu subdomain inilah yang disebut sebagai elemen. Distribusi ini di dalam elemen dicari dengan menginterpolasi nilai-nilai disetiap simpul.

Metode elemen hingga yang digunakan dalam penelitian ini diturunkan berdasarkan Metode Variasional Ritz. Metode tersebut merupakan suatu metode untuk menyusun matrik elemen. Pada prinsipnya metode ini memanfaatkan subdomain dari domain keseluruhan yang dikenal dengan elemen hingga dalam bentuk luasan dan menggunakan metode variasional dari kalkulus variasi untuk menyelesaikan permasalahan dengan meminimisasi fungsi error.

III.1 Penerapan Metode Elemen Hingga Pada Kasus Magnetotellurik

Persamaan differensial yang akan diselesaikan pada kasus MT 2-D adalah persamaan mode TE dan TM, dari persamaan tersebut akan dihitung nilai medan listrik horizontal dan dihitung nilai medan magnet dari masing-masing elemen yang ingin ditinjau.

Berikut tahapan-tahapan metode elemen hingga yang digunakan dalam pemodelan MT 2-D:

1. Diskritisasi blok model resistivitas menjadi elemen-elemen persegi yang tersusun atas empat segitiga.
2. Pembuatan matriks $[K^e]$ dan $\{b^e\}$ dari masing-masing elemen.
3. Penyusunan sistem matriks dari matriks-matriks elementer.
4. Penerapan syarat batas.
5. Penyelesaian matriks $[K]\{E\} = \{b\}$

III.2 Metode Elemen Hingga Berbasis Node

III.2.1 Syarat Batas Kasus Elektromagnetik

Persamaan differensial yang berkaitan dengan perambatan gelombang elektromagnetik dua dimensi yaitu (Jianming, 1993):

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \beta \phi = f \text{ di } \Omega \quad (\text{III.1})$$

Dimana ϕ merupakan intensitas medan listrik ataupun medan magnetik α_x , α_y dan β adalah parameter yang berkaitan dengan sifat fisis dari domain yang sedang ditinjau. Untuk kasus magnetotellurik nilai $f = 0$, yang artinya sumbernya sama dengan nol.

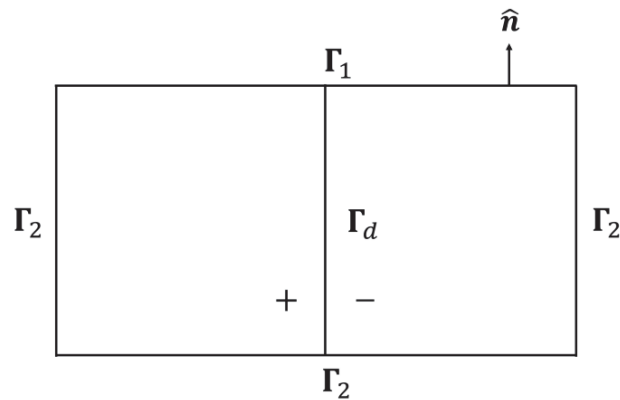
Syarat batas yang diberikan ketika

$$\phi = p \text{ pada } \Gamma_1 \quad (\text{III.2})$$

Dan

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y}\right) \cdot \hat{n} + \gamma \phi = q \text{ pada } \Gamma_2 \quad (\text{III.3})$$

Dimana $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ menyatakan kontour atau batasan yang melingkupi luasan domain yang sedang ditinjau di area Ω , $\hat{n}$ merupakan vektor satuan arah normal luarnya dan γ , p dan q adalah parameter yang diketahui terkait dengan sifat fisik batas. Secara khusus, p dan q dapat dianggap sebagai sumber batas eksitasi karena syarat batas Neumann merupakan kasus dengan $\gamma = 0$ (Gambar 3.1).



Gambar 3.1. Domain pemodelan dan batasan (kontour) yang berkaitan dengan syarat batas.

Syarat batas $\phi = p$ pada Γ_1 merupakan syarat batas Dirichlet dan syarat batas $\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y}\right) \cdot \hat{n} = q$ pada Γ_2 merupakan syarat batas Neumann. Persamaan differensial dengan kondisi syarat batas di atas yang akan diselesaikan dengan metode elemen hingga.

III.2.2 Formulasi Variasional

Pada permasalahan variasional yang ekivalen dengan persamaan differensial dan syarat batas akan diberikan sebagai berikut

$$\begin{cases} \delta F(\phi) = 0 \\ \phi = 1 \end{cases} \quad \text{pada } \Gamma_1 \quad (\text{III.4})$$

dimana

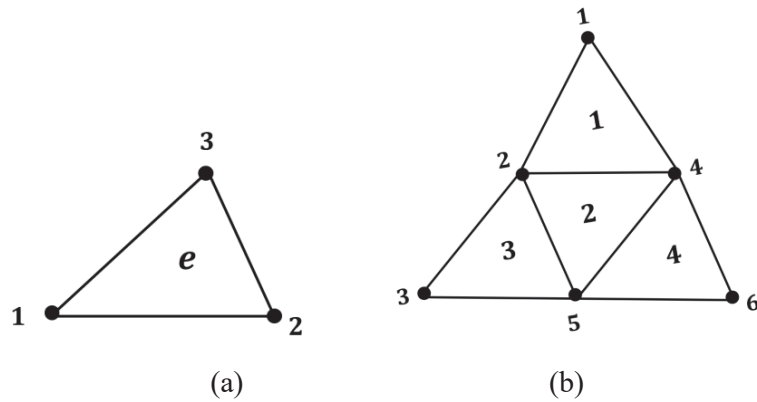
$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\gamma}{2} \phi^2 - q\phi \right) d\Gamma - \iint_{\Omega} f\phi d\Omega \quad (\text{III.5})$$

III.3 Analisis Elemen Hingga

Pada dasarnya analisis metode elemen hingga dibagi menjadi empat langkah penyelesaian yaitu (Jin, 1962):

III.3.1 Diskritisasi Domain

Dalam metode elemen hingga 2-D, langkah pertama yang dilakukan yaitu membagi area seluruh domain menjadi elemen dua dimensi yang jumlahnya berhingga. Dalam kasus ini digunakan elemen berbentuk segitiga. Dalam membagi area domain tersebut, tidak boleh ada elemen yang saling berhimpit ataupun terpisah. Jadi setiap elemen harus saling terhubung melalui simpul-simpulnya, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.2. (a) Bentuk elemen segitiga dengan penomoran lokalnya. (b) Pembagian domain dengan elemen berbentuk segitiga beserta penomoran lokal dan global.

Tabel 3.1. Penomoran global untuk setiap simpul

e	$n(1, e)$	$n(2, e)$	$n(3, e)$
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

Selain yang telah dijelaskan, beberapa data lain juga diperlukan dalam perumusan elemen hingga:

1. Koordinat node x_i dan y_i untuk $i = 1, 2, \dots, N$ dimana N menunjukkan jumlah total node.
2. Nilai dari $\alpha_x, \alpha_y, \beta$ dan f untuk setiap elemen.
3. Nilai dari p untuk node yang berada di Γ_1 .
4. Nilai dari γ dan q untuk setiap segmen dengan node di Γ_2 .

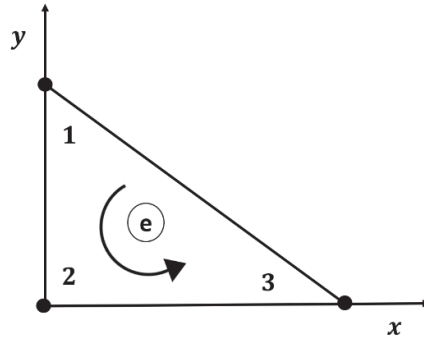
III.3.2 Fungsi Interpolasi

Setelah mendiskritisasi domain, langkah selanjutnya yaitu menentukan fungsi interpolasi ϕ disetiap elemen. Untuk elemen dua dimensi berbentuk segitiga, fungsi ϕ untuk tiap elemen didekati dengan:

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (\text{III.6})$$

Dimana a^e , b^e dan c^e adalah koefisien konstanta yang akan ditentukan, dan e adalah jumlah elemen. Untuk elemen segitiga linier, ada tiga titik yang terletak di simpul segitiga (Gambar 3.2). Asumsikan bahwa node diberi nomor berlawanan arah jarum jam dengan angka 1, 2 dan 3, dengan fungsi ϕ menjelaskan informasi pada tiap-tiap simpul untuk masing-masing elemen. Dalam kasus magnetotellurik, nilai ϕ merupakan nilai medan listrik ataupun medan magnet. Untuk elemen e maka nilai-nilai ϕ nya yaitu:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$



Gambar 3.3. Elemen segitiga linier.

Misalkan matriks,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = A \quad (\text{III.8})$$

Maka,

$$\begin{pmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Sehingga fungsi ϕ untuk tiap elemen dapat ditulis menjadi:

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e \quad (\text{III.10})$$

Dimana

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.11})$$

Masing-masing nilai a , b dan c yaitu

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & b_1^e &= y_2^e - y_3^e & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & b_2^e &= y_3^e - y_1^e & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & b_3^e &= y_1^e - y_2^e & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (III.12)$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \det A$$

Dimana Δ^e adalah luas area untuk tiap elemen.

Nilai x_j^e dan y_j^e ($j = 1, 2, 3$) pada masing-masing nilai a , b dan c adalah koordinat dari titik simpul- j pada elemen- e . Fungsi interpolasi $N_i^e(x_j^e, y_j^e)$ memiliki sifat sebagai berikut:

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (III.13)$$

III.3.3 Formulasi dengan Metode Ritz

Setelah mendapatkan bentuk fungsi ϕ pada persamaan (III.10), kemudian dilanjutkan untuk memformulasikan persamaan menggunakan Metode Ritz. Dalam Metode Ritz, fungsional F yang sesuai dengan kondisi syarat batas Neumann (III.3) akan bersesuaian dengan persamaan orde dua sebagai berikut:

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^M F^e(\phi^e) \quad (III.14)$$

Dimana M merupakan jumlah elemen dan F^e merupakan subfungsi yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$F^e(\phi^e) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 + \beta (\phi^e)^2 \right] d\Omega - \iint_{\Omega^e} f \phi^e d\Omega \quad (III.15)$$

Dimana Ω^e menunjukkan domain dari elemen e . Kemudian menurunkan persamaan $F^e(\phi^e)$ terhadap ϕ_i^e maka akan didapat:

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) d\Omega - \iint_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \quad i = 1, 2, 3 \quad (III.16)$$

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = [K^e] \{ \phi^e \} - \{ b^e \} \quad (\text{III.17})$$

Dimana,

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = \left[\frac{\partial F^e}{\partial \phi_1^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_2^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_3^e} \right]^T; \{ \phi^e \} = [\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e]^T \quad (\text{III.18})$$

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right] dx dy \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.19})$$

$$b_i^e = \iint_{\Omega^e} f N_i^e dx dy \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.20})$$

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (a_x^e b_i^e c_j^e + a_y^e b_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ij}) \quad (\text{III.21})$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e \quad (\text{III.22})$$

Kemudian setelah didapat matriks pada masing-masing elemen, matriks K^e dan b^e akan disusun sejumlah banyaknya elemen kedalam matriks global $[K]$ dan $\{b\}$.

Pada seluruh elemen, penjumlahan F^e yang diturunkan terhadap ϕ_i^e akan memiliki nilai nol, maka:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \phi} \right\} = \sum_{e=1}^M \left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = \sum_{e=1}^M \left[\overline{[K^e]} \{ \phi^e \} - \{ \overline{b^e} \} \right] = 0 \quad (\text{III.23})$$

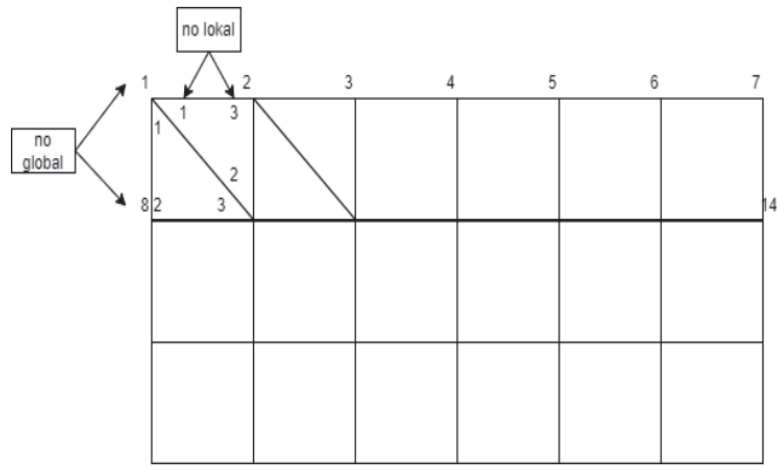
$$[K] \{ \phi \} = \{ b \} \quad (\text{III.24})$$

Dengan

$$[K] = \sum_{e=1}^M \overline{[K^e]} \quad \text{dan} \quad \{b\} = \sum_{e=1}^M \{ \overline{b^e} \} \quad (\text{III.25})$$

Dimana $[K]$ merupakan hasil penyusunan dari $\overline{[K^e]}$ untuk setiap elemen dan $\{b\}$ merupakan hasil penyusunan dari $\{ \overline{b^e} \}$ untuk setiap elemen.

Penyusunan matriks $[K]$ dilakukan dengan beberapa langkah. Pertama, membuat matriks nol $N \times N$ yang akan ditambahkan K_{ij} , kepada $K_{n(i,e),m(j,e)}$. Langkah selanjutnya dilakukan cara yang sama dengan matriks $\{b\}$, dibentuk matriks $N \times 1$ dan kemudian ditambahkan b_i kepada $b_{n(i,e)}$.



Gambar 3.4. Pembagian domain dengan penomoran lokal dan global.

Pembagian domain akan menghasilkan nomor sebagai berikut:

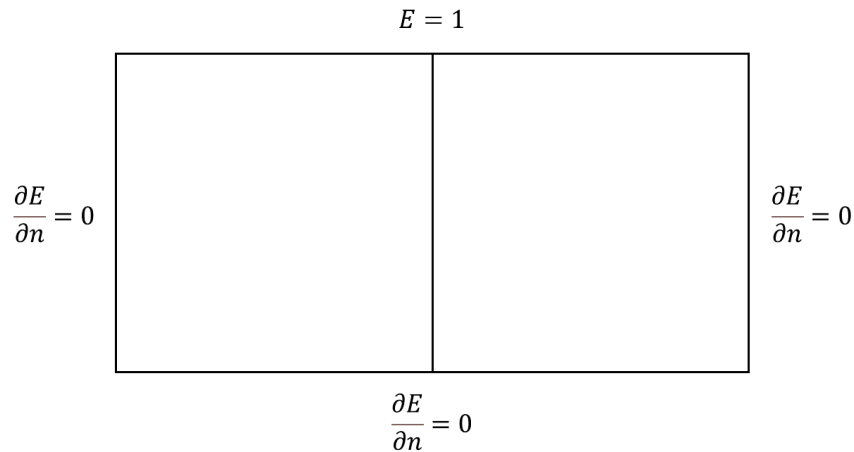
Tabel 3.2. Penomoran global untuk setiap simpul

e	$n(1, e)$	$n(2, e)$	$n(3, e)$
1	1	8	9
2	1	9	2
3	2	9	10
4	2	10	3

Sistem penomoran di atas digunakan untuk menyusun matrik $[K]$ dari nilai $\overline{K^e}$ untuk masing-masing elemen dan $\{b\}$ dari $\overline{b^e}$ masing-masing elemen.

III.3.4 Penerapan Syarat Batas

Syarat batas digunakan ketika menyelesaikan persamaan dari sistem. Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet untuk semua simpul pada bagian permukaan dan syarat batas Neumann pada bagian sisi kanan, kiri dan bawah.



Gambar 3.5. Pembagian domain dengan syarat batas

III.4 Pemodelan Magnetotellurik 2 Dimensi

Pemodelan magnetotellurik merupakan tahapan penting guna mengekstraksi informasi yang terkandung dalam data untuk memperkirakan distribusi nilai tahanan jenis di bawah permukaan melalui model-model matematis (Grandis, 2010). Pemodelan dilakukan dengan tujuan menjelaskan sistem fisis yang ada pada alam dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Pemodelan dapat dibagi menjadi dua, yaitu pemodelan kedepan dan pemodelan inversi.

Teknik pemodelan kedepan, merupakan suatu teknik yang dilakukan untuk menghitung respon suatu model hingga diperoleh data-data yang akan dicocokkan dengan data percobaan. Sedangkan teknik pemodelan inversi merupakan teknik kebalikan dari pemodelan kedepan, yaitu memperkirakan parameter model dari data tertentu yang akan menghasilkan data sintetik yang cocok dengan data observasi lapangan.

Pada metode Magnetotellurik dikenal beberapa tipe pemodelan, seperti pemodelan 1-Dimensi, 2-Dimensi dan 3-Dimensi. Penggunaan model 1-Dimensi akan baik diterapkan pada data yang memenuhi data 1-Dimensi. Namun, pemodelan ini terkadang masih memenuhi keterbatasan terkait dengan keakuratan informasi yang diberikan, sehingga pemodelan 2-Dimensi akan memberikan hasil yang baik.

Dalam penelitian ini, program *forward modelling* dan inversi yang digunakan adalah pemodelan magnetotellurik untuk polarisasi-E (*Transverse Electric*) dan polarisasi-H (*Transverse Magnetic*) dengan menggunakan metode elemen hingga berbasis node yang dikembangkan oleh Diba et al (2022). Pemodelan inversi dalam program ini dilakukan dengan metode Algoritma Minimisasi Gauss Newton. Program ini dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB. Dalam hal ini, program *forward modelling* yang telah dibuat divalidasi untuk mengecek akurasi dengan menggunakan model standar dua dimensi COMMEMI 2D-0 dan COMMEMI 2D-1 (Zhdanov, 1997). Kemudian program inversi diuji terhadap beberapa model sintetik dengan struktur resistivitas yang berbeda. Validasi program inversi relatif sederhana, yaitu kesesuaian dan akurasi model yang dihasilkan dengan model sintetik yang digunakan. Dalam pemodelan ini digunakan beberapa model sintetik yaitu model bumi homogen, model bumi berlapis, model bumi kontak vertikal dan model bumi anomali. Secara umum tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi perancangan mesh, kemudian pembuatan data sintetik lalu melakukan pemodelan kedepan dan selanjutnya dilakukan pemodelan inversi berdasarkan data sintetik dan mesh yang telah dibuat.

III.4.1 Perhitungan Parameter Resistivitas dan Fasa Impedansi di Permukaan

Metode Elemen Hingga digunakan untuk memperoleh nilai pada setiap komponen E_x , H_y , H_z (Mode TE) dan H_x , E_y , E_z (Mode TM).

Mode TE

Untuk mode TE parameter lain yang harus ditentukan adalah nilai medan listrik E_x . untuk menentukan nilai medan listrik tersebut, digunakan persamaan (II.39) menjadi persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma E_x \quad (\text{III.26})$$

Persamaan numerik untuk menentukan medan listrik E_x yaitu:

$$E_x = D^{-1}b \quad (\text{III.27})$$

Dimana D^{-1} merupakan invers matriks yang berisi koefisien metode Ritz, b merupakan vektor syarat batas.

Nilai medan magnet di tengah menjadi:

$$H_y = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (\text{III.28})$$

Nilai impedansinya adalah:

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \quad (\text{III.29})$$

Nilai resistivitas semu dan fasa impedansinya adalah,

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\mu\omega} |Z_{xy}|^2 \quad (\text{III.30})$$

$$\phi_{xy} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Re}(Z_{xy})}{\text{Im}(Z_{xy})} \right) \quad (\text{III.31})$$

Mode TM

Untuk mode TM parameter lain yang harus ditentukan adalah nilai medan listrik H_x . untuk menentukan nilai medan listrik tersebut, digunakan persamaan (II.39) menjadi persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma E_x \quad (\text{III.32})$$

Persamaan numerik untuk menentukan medan listrik H_x yaitu:

$$H_x = D^{-1}b \quad (\text{III.33})$$

Dimana D^{-1} merupakan invers matriks yang berisi koefisien metode Ritz, b merupakan vektor syarat batas.

Nilai medan magnet di tengah menjadi:

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (\text{III.34})$$

Nilai impedansinya adalah:

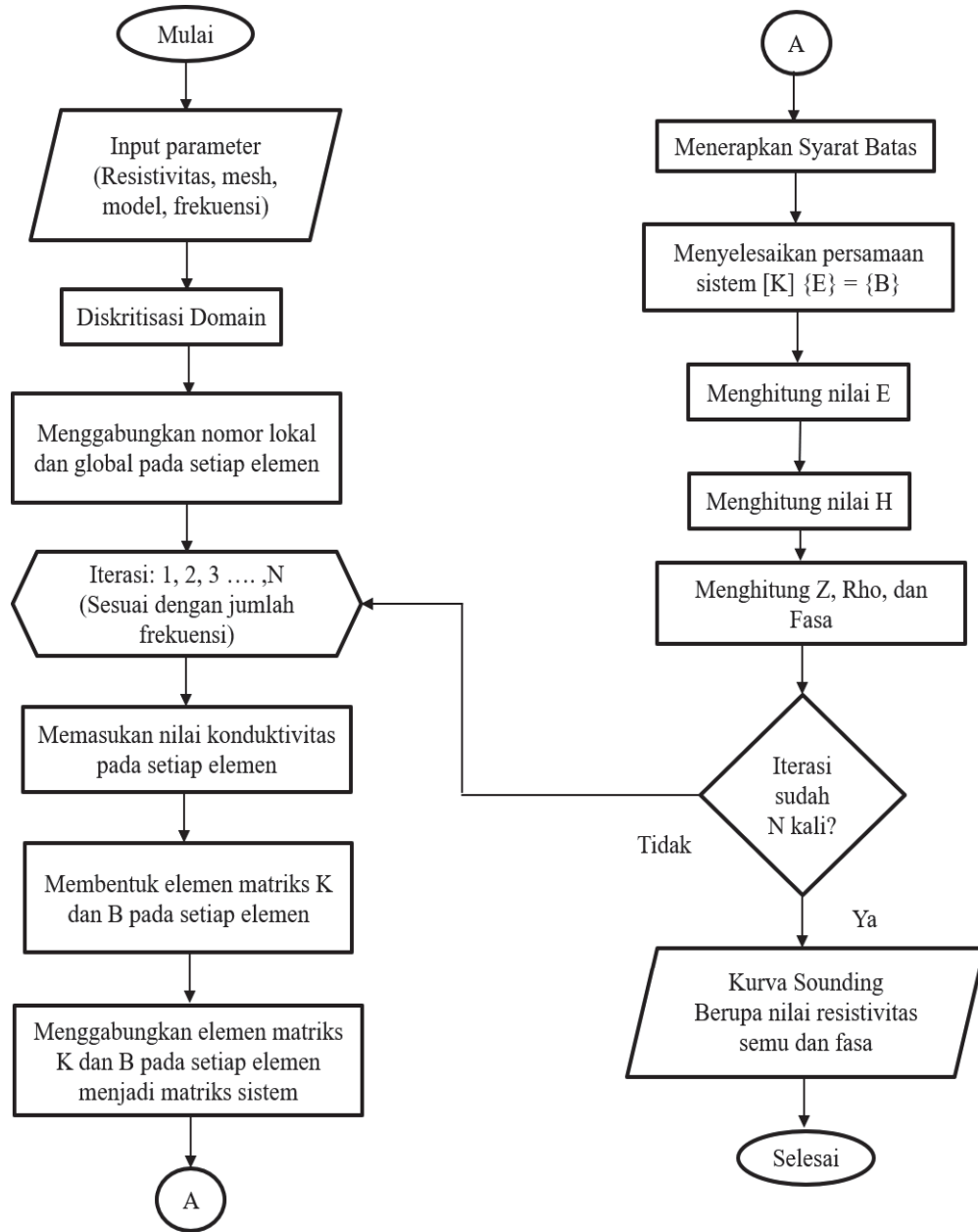
$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} \quad (\text{III.35})$$

Nilai resistivitas semu dan fasa impedansinya adalah,

$$\rho_{yx} = \frac{1}{\mu\omega} |Z_{yx}|^2 \quad (\text{III.36})$$

$$\phi_{yx} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Re}(Z_{yx})}{\text{Im}(Z_{yx})} \right) \quad (\text{III.37})$$

Berikut merupakan diagram alir proses pemodelan kedepan.



Gambar 3.6. Diagram Alir Pemodelan Kedepan 2-Dimensi

III.4.2 Pemodelan Inversi Magnetotellurik

Sebagian besar permasalahan di bidang geofisika berkaitan erat dengan masalah inversi. Pemodelan inversi merupakan proses kebalikan dari pemodelan kedepan, yakni memperkirakan parameter model dari data tertentu yang akan menghasilkan data sintetik yang cocok dengan data observasi.

Metode magnetotellurik (MT) digunakan untuk memperkirakan resistivitas bawah permukaan berdasarkan data medan elektromagnetik (EM) yang bersumber dari alam. Data MT pada umumnya berupa kurva sounding resistivitas semu serta fasa terhadap periode ataupun frekuensi. Periode atau frekuensi berasosiasi terhadap kedalaman, semakin besar periode (semakin kecil frekuensi) maka penetrasi kedalamannya semakin besar pula. Data sounding MT pada beberapa titik suatu lintasan dapat dimodelkan baik dengan model 1-Dimensi maupun 2-Dimensi. Pada model 2-Dimensi resistivitas bervariasi dalam arah horizontal (sumbu y) dan dalam arah vertikal (kedalaman) sumbu z , sehingga fungsi resistivitasnya dapat dinyatakan sebagai fungsi $\rho(y, z)$.

III.4.2.1 Inversi

Inversi mengacu pada proses numerik untuk mendapatkan struktur resistivitas yang menjelaskan fungsi respons yang diamati. Deskripsi data merupakan hal yang pertama dilakukan dalam kebanyakan permasalahan inversi. Dalam hal ini, data digambarkan sebagai sekumpulan nilai numerik, karenanya penggunaan vektor dapat mempermudah representasi data tersebut. Jika dalam suatu percobaan dilakukan pengukuran sebanyak N kali, data-data tersebut dapat disajikan sebagai elemen vektor d yang memiliki panjang N . Parameter model juga dapat dinyatakan sebagai elemen dari vektor m yang memiliki panjang M (Menke, 2012).

Pernyataan dasar dari permasalahan inversi adalah bahwa parameter model dengan data memiliki suatu hubungan tertentu. Hal yang menghubungkan parameter model dengan data ini dinamakan model. Biasanya model dapat berupa satu atau lebih perumusan atau formulasi matematis yang melibatkan data dan parameter model. Dalam situasi yang lebih realistis, data dan parameter model memiliki hubungan

yang lebih kompleks. Data dan parameter model dapat terhubung oleh persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{d} = F(\mathbf{m}) + \mathbf{e} \quad (\text{III.38})$$

dimana $\mathbf{d}$ adalah vektor-N yang mewakili data yang diamati dan $\mathbf{e}$ adalah *error*. F melakukan transformasi dari domain model $\mathbf{m}$ (vektor-M) ke dalam domain data sehingga $F(\mathbf{m})$ adalah N-vektor data sintetik dari model $\mathbf{m}$.

III.4.2.2 Fungsi Objektif

Permasalahan yang akan diselesaikan dengan meminimalkan fungsi objektif Ψ (Tikhonov & Arsenin, 1977), yang ditujukan oleh persamaan sebagai berikut:

$$\Psi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - F(\mathbf{m}))^T V^{-1} (\mathbf{d} - F(\mathbf{m})) + \lambda \mathbf{m}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} \quad (\text{III.39})$$

V adalah matriks pembobotan diagonal yang terdiri dari invers varian *error*. Fungsi objektif terdiri dari suku data *misfit* dan model *roughness*. Struktur yang memiliki skala kecil tidak perlu digunakan untuk mempertahankan kesederhanaan model. Matriks $\mathbf{L}$ dipilih sebagai operator selisih, sehingga $\mathbf{Lm}$ adalah bentuk Laplacian dari $\log_{10}(\rho)$ ketika grid numerik seragam.

Pemilihan parameter regulasi λ didasarkan antara data *misfit* dan model *roughness*. Kondisi optimal menjadi titik dimana penurunan λ hanya mencapai sedikit penurunan data *misfit* dengan mempertimbangkan peningkatan model *roughness* yang signifikan.

III.4.2.3 Algoritma Minimisasi Gauss-Newton

Vektor gradien dan matriks Hessian didefinisikan sebagai berikut:

$$g_j(\mathbf{m}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{m})}{\partial m_j} \quad (\text{III.40})$$

$$H_{j,k}(\mathbf{m}) = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{m})}{\partial m_j \partial m_k} \quad (\text{III.41})$$

Gradien adalah M-vektor turunan pertama dari fungsi objektif, sedangkan Hessian adalah matriks M x M turunan kedua dari fungsi objektif.

Matriks Jacobian (sensitivitas) adalah matriks $N \times M$ turunan pertama dari operator *forward* ke model, diberikan oleh:

$$A_{i,j}(\mathbf{m}) = \frac{\partial F_i(\mathbf{m})}{\partial m_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (\text{III.42})$$

Dimana F_i adalah elemen ke- i dari vektor $\mathbf{F}$. Setelah itu,

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) = -2\mathbf{A}(\mathbf{m})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{d} - F(\mathbf{m})) + 2\lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} \quad (\text{III.43})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{m}) = 2\mathbf{A}(\mathbf{m})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{m}) + 2\lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} - 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\mathbf{m})}{\partial m_j \partial m_k} \mathbf{V}^{-1}(d_i - F_i(\mathbf{m})) \quad (\text{III.44})$$

Suku ketiga di ruas kanan (III.44) tidak nol, jika F adalah suku dari fungsi non-linier.

Namun, perhitungan kedepan magnetotellurik bersifat non-linier. Dalam memecahkan masalah invers non-linier tidak mudah, sehingga linierisasi iteratif pendekatan biasanya dipilih sebagai alternatif dalam menyelesaikan masalah. Linierisasi dilakukan dengan cara memperluas F dalam ekspansi Taylor orde pertama disekitar model $\mathbf{m}_0$, sehingga

$$F(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0) = F(\mathbf{m}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{m}_0)(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \quad (\text{III.45})$$

Kemudian, fungsi objektif linier, gradien dan Hessian dipresentasikan sebagai

$$\psi(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0) = (\mathbf{d} - F(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0))^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{d} - F(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0)) + \lambda \mathbf{m}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} \quad (\text{III.46})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0) = -2\mathbf{A}(\mathbf{m}_0)^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{d} - F(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0))^T + 2\lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} \quad (\text{III.47})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{m}_0) = 2\mathbf{A}(\mathbf{m}_0)^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{m}_0) + 2\lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (\text{III.48})$$

$\mathbf{H}(\mathbf{m}_0)$ adalah bentuk perkiraan dari $\mathbf{H}(\mathbf{m})$ dengan menghilangkan suku ketiga dalam ruas kanan (III.41) dan terbebas dari $\mathbf{m}$. Kemudian $\mathbf{g}(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0)$ merupakan fungsi linier dari $\mathbf{m}$ dari persamaan (III.40) dan (III.41), sehingga menjadi persamaan berikut:

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}; \mathbf{m}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{m}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{m}_0)(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \quad (\text{III.49})$$

Algoritma yang digunakan untuk meminimumkan fungsi objektif yang dilinierisasi adalah Algoritma Gauss-Newton. Diberikan model awal, urutan model (dengan indeks ℓ) dihasilkan sedemikian rupa sehingga

$$\psi(\mathbf{m}_{\ell+1}; \mathbf{m}_\ell) = \min_{\mathbf{m}} \psi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{m}; \mathbf{m}_\ell) \quad (\text{III.50})$$

Kondisi ini menyatakan bahwa persamaan (III.46) sama dengan nol, dan

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}_\ell) = -\mathbf{H}(\mathbf{m}_\ell)(\mathbf{m}_{\ell+1} - \mathbf{m}_\ell) \quad (\text{III.51})$$

Dengan asumsi matriks Hessian tidak singular,

$$\mathbf{m}_{\ell+1} = \mathbf{m}_\ell - \mathbf{H}_\ell^{-1} \mathbf{g}_\ell \quad (\text{III.52})$$

Dimana $\mathbf{g}_\ell \equiv \mathbf{g}(\mathbf{m}_\ell)$ dan $\mathbf{H}_\ell \equiv \mathbf{H}(\mathbf{m}_\ell)$. Persamaan (III.49) menyatakan bahwa model untuk selanjutnya untuk iterasi $\mathbf{m}_{\ell+1}$ didasarkan pada ekspansi Taylor orde pertama di sekitar iterasi saat ini model $\mathbf{m}_\ell$. Dalam hal tersebut, harus dilakukan pengulangan sampai gradien bernilai kecil. Jika fungsi *forward* F sebenarnya linier, maka iterasi selesai pada $\ell = 1$.

Levenberg (1944) dan Marquardt (1963) memperkenalkan faktor redaman dari Hessian matriks yang menstabilkan urutan model. Versi sederhana dari Levenberg-Marquardt adalah

$$\mathbf{m}_{\ell+1} = \mathbf{m}_\ell - (\mathbf{H}_\ell + \varepsilon_\ell \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}_\ell \quad (\text{III.53})$$

Dimana ε_ℓ adalah parameter redaman positif. Ketika fungsi *forward* F sangat non-linier dan Hessian yang dilinierisasi tidak terkondisikan, maka redaman dapat menstabilkan inversi dan mengurangi langkah-langkah yang tidak perlu dalam model.

III.4.2.4 Matriks Jacobi

untuk mempermudah, fungsi *forward* F dapat dituliskan oleh persamaan

$$F_i(\mathbf{m}) = b_i(\mathbf{m})^T \mathbf{v}(\mathbf{m}) \quad (\text{III.54})$$

Dalam kode inversi, F sebenarnya tergantung pada respon dan lebih rumit.

Mengingat persamaan (III.38),

$$A_{i,j} = \left(\frac{\partial b_i}{\partial m_j} \right)^T \mathbf{v} + \mathbf{b}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial m_j} \quad (\text{III.55})$$

Hasil persamaan diferensial

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_j} \mathbf{v} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial m_j} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial m_j} \quad (\text{III.56})$$

Kemudian, substitusi $\partial \mathbf{v} / \partial m_j$ persamaan (III.56) ke persamaan (III.55), sehingga diperoleh persamaan

$$A_{i,j} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial m_j} \right)^T \mathbf{v} + \mathbf{b}_i^T \mathbf{D}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial m_j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_j} \mathbf{v} \right) \quad (\text{III.57})$$

Turunan parsial dari $\mathbf{D}$, $\mathbf{s}$, dan $\mathbf{b}_i$ dapat diselesaikan secara analitik. Tergantung pada datanya, $\mathbf{b}_i$ juga bisa terbebas dari $\mathbf{m}$, dan suku pertama di ruas kanan (III.57) adalah nol. Istilah kedua adalah masalah *forward* semu yang harus diselesaikan M kali untuk membangun seluruh Jacobian.

Rodi (1976) mengusulkan metode alternatif untuk menyelesaikan suku kedua di sebelah kanan sisi dari persamaan (III.57) yang menguntungkan simetri matriks koefisien $\mathbf{D}$, dikenal sebagai metode timbal balik. Ini memecahkan sistem linier

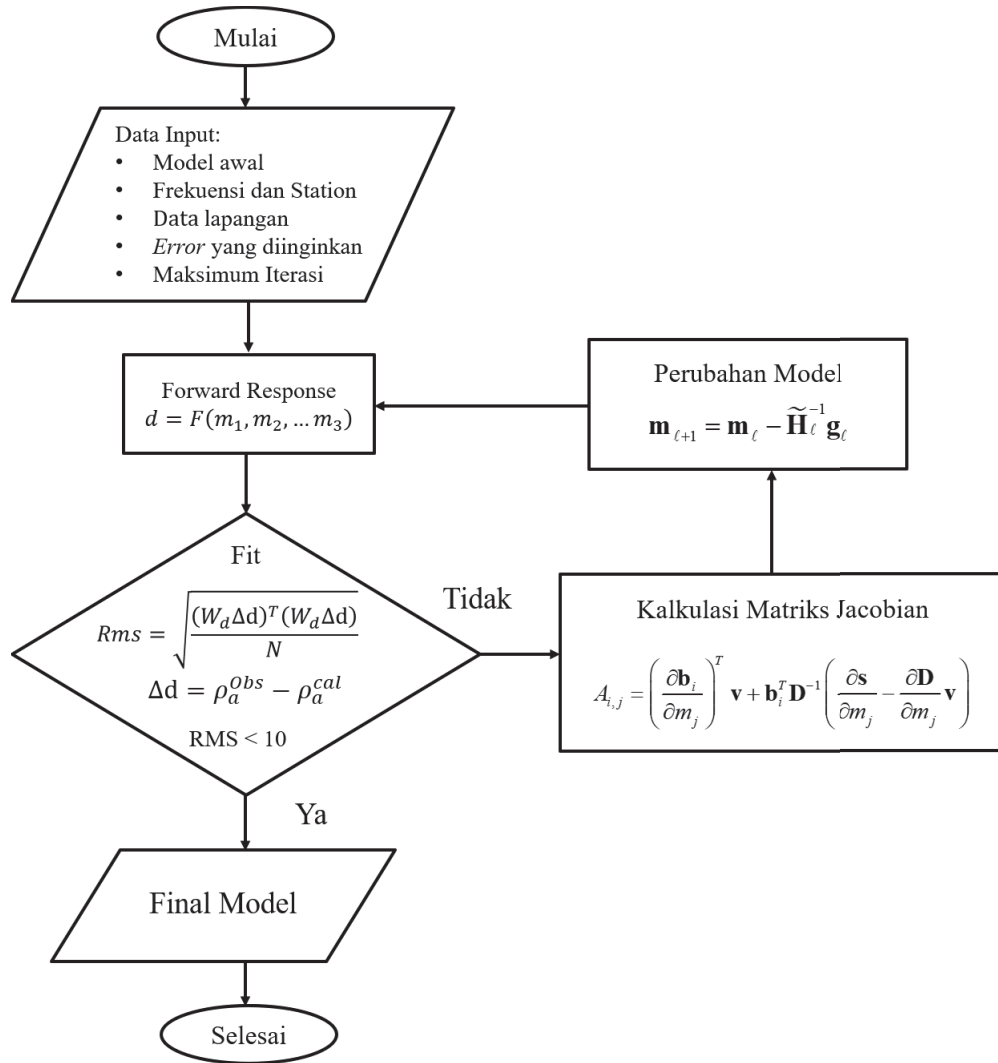
$$\mathbf{D} \mathbf{u}_i = \mathbf{b}_i \quad (\text{III.58})$$

Sehingga $\mathbf{u}_i = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}_i$. Ketika $\mathbf{D}$ simetris, maka $\mathbf{b}_i^T \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}_i)^T = \mathbf{u}_i^T$. Sehingga,

$$A_{i,j} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial m_j} \right)^T \mathbf{v} + \mathbf{u}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial m_j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_j} \mathbf{v} \right) \quad (\text{III.59})$$

Untuk menyelesaikan seluruh matriks Jacobian, persamaan *forward* semu (III.58) diselesaikan N kali. Metode resiprositas efektif bila jumlah datanya kurang dari jumlah parameter model ($N < M$), yang biasanya terjadi pada 2-Dimensi dan 3-Dimensi.

Berikut merupakan diagram alir proses Inversi.



Gambar 3.7. Diagram Alir Proses Inversi.